0.4. Producto cartesiano

Antes de dar la definición precisa del producto cartesiano de dos conjuntos nos referiremos brevemente al concepto de pareja ordenada. Rigurosamente hablando la pareja ordenada (a, b) es el conjunto $\{\{a\}, \{a,\ b\}\}$. La primera coordenada de la pareja es el elemento que aparece en los dos conjuntos que la definen y la segunda coordenada es el elemento que aparece sólo en uno de los conjuntos. Si $a = b$ entonces la pareja (a, b) se reduce al conjunto $\{\{a\}\}$ y en este caso la primera coordenada es igual a la segunda.

Sean X y Y dos conjuntos. El producto cartesiano $X \times Y$ es el conjunto de parejas ordenadas que tienen como primera coordenada un elemento de X y como segunda coordenada un elemento de Y. Esto es:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

De la definición se tiene que si X y Y son conjuntos entonces $X \times \emptyset = \emptyset \times Y = \emptyset$ y que, en general, $X \times Y \neq Y \times X$.

Ejercicios

1. Muestre con un ejemplo que si A y B son conjuntos arbitrarios entonces no es siempre cierto que $A \times B = B \times A$. Bajo qué condiciones es cierta esta igualdad?

2. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ se pueden expresar como el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) $\{(x, y) : y$ es un entero $\}$.

   b) $\{(x, y) : x$ es un natural par y $y \in \mathbb{Q}\}$.

   c) $\{(x, y) : y < x\}$.

   d) $\{(x, y) : x$ es un múltiplo entero de $\pi\}$.

   e) $\{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\}$.

3. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. En cada caso dé una demostración o un contraejemplo indicando además si por lo menos es cierta una contenencia.

   a) $A \times (A \setminus B) = (A \times A) \setminus (A \times B)$.

   b) $A \times (B \setminus A) = (A \times B) \setminus (A \times A)$.

   c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

   d) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

   e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

   f) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

   g) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

   h) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$.