Respuesta al impulso

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Respuesta al Impulso discreto

Respuesta del sistema cuando la entrada es el *impulso unitario* $\delta(k)$, con condiciones iniciales nulas. La respuesta al impulso suele denotarse por $h(k)$, y su transformada $\mathcal{Z}$ por $H(z)$

Figura 1: Sistema Dinámico Discreto

Función Impulso discreto

La función $\delta(k)$ se define como:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

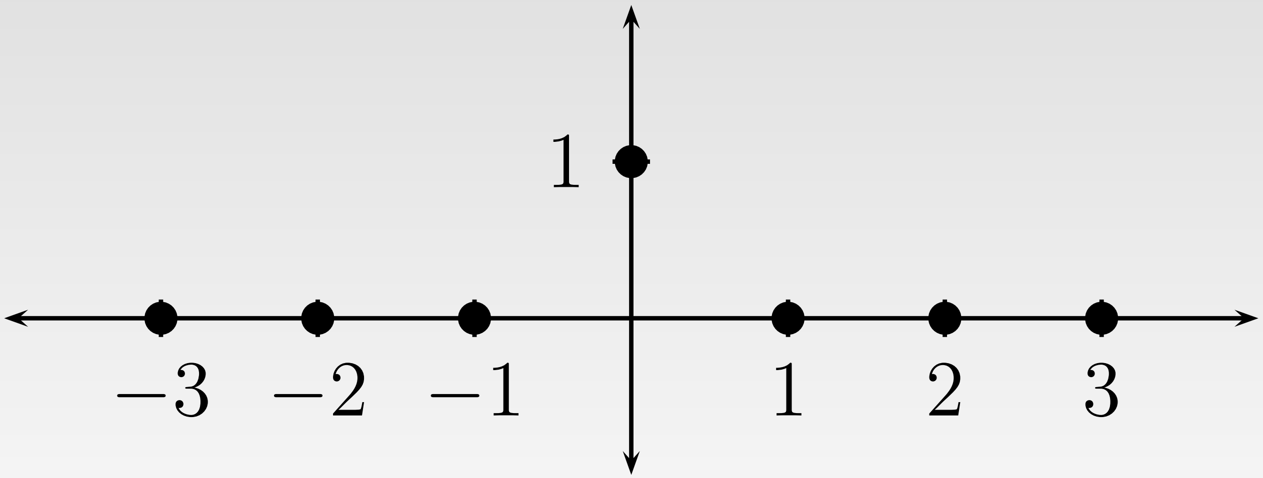


Figura 2: Función Impulso Unitario discreto

Función Impulso discreto

Una de las características importantes de la función $\delta(k)$ es que su transformada $\mathcal{Z}$ es 1, tal como se muestra a continuación:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0) z^{-0} = 1$$

Respuesta al Impulso discreto unitario

Supóngase un sistema discreto con condiciones iniciales Nulas, con función de transferencia $F(z)$, que se excita con el impulso unitario .
La respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia z será el producto de la entrada por la función de transferencia:

$$H(z) = U(z)F(z) = 1F(z) = F(z)$$

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow H(z)$$

Figura 3: Sistema Dinámico Discreto estimulado con el impulso unitario

Respuesta al Impulso discreto

La Función de Transferencia es la Transformada $\mathcal{Z}$ de la Respuesta al impulso

$$\begin{tikzcd}
\text{Respuesta al Impulso} \arrow[r, bend left, "\mathcal{Z}"] & \text{Función de Transferencia} \arrow[l, bend left, "\mathcal{Z}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Relación entre la respuesta al impulso y la Función de Transferencia. Caso Discreto

Respuesta al Impulso discreto

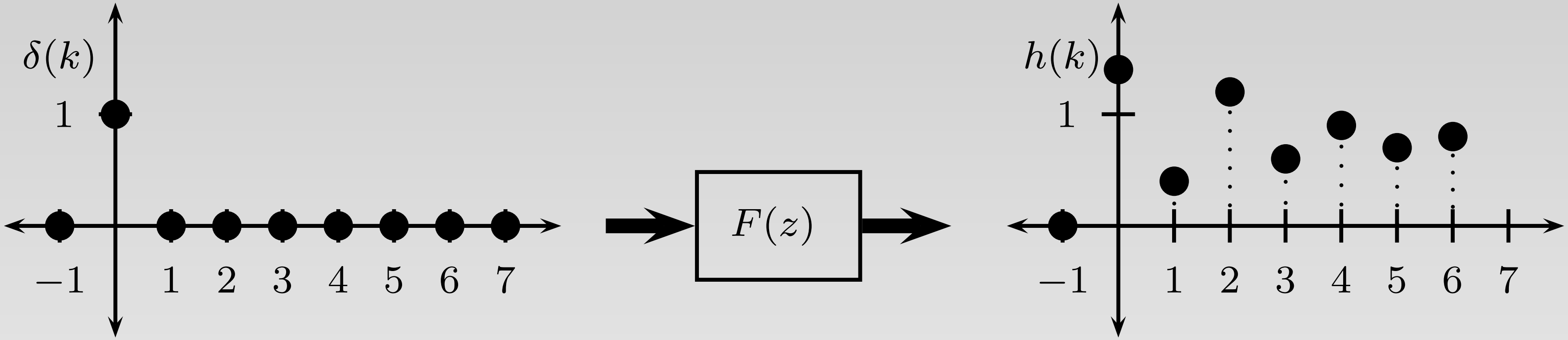


Figura 5: Respuesta al Impulso discreto

Respuesta al Impulso discreto

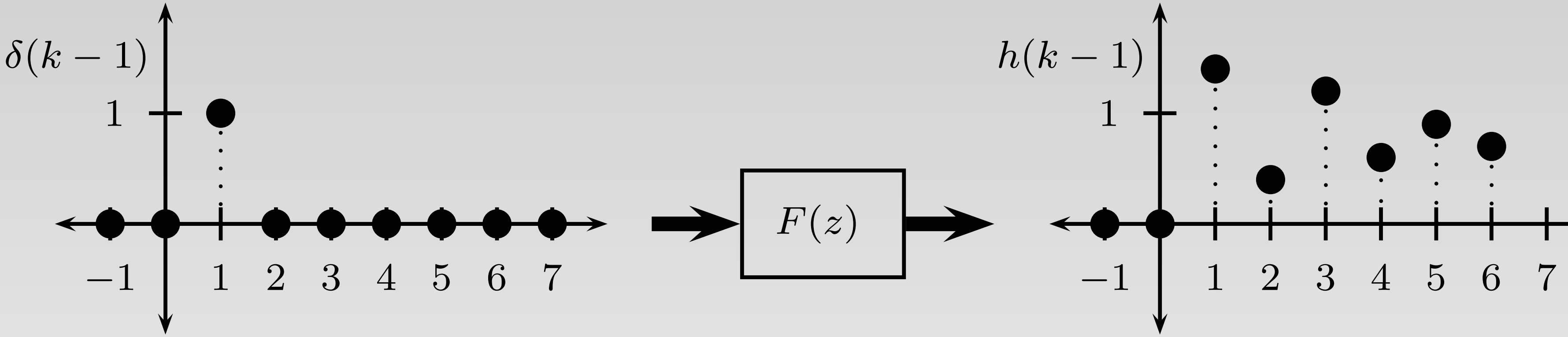


Figura 6: Respuesta al Impulso discreto retrasado

Respuesta al Impulso discreto

$$c\delta(k-i) \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow ch(k-i)$$

Figura 7: Respuesta al Impulso discreto genérica

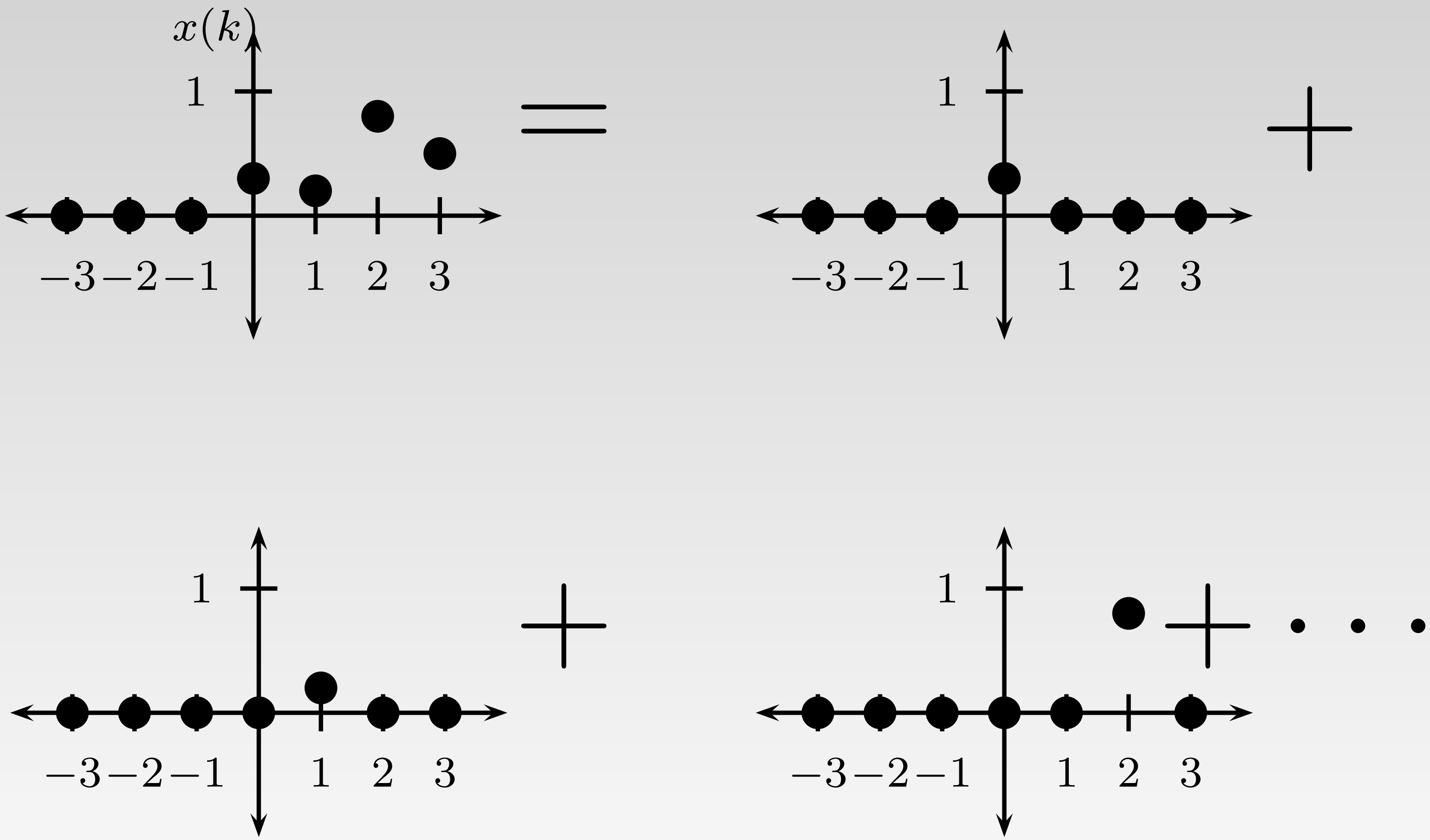
Convolución

Cualquier señal $x(k)$ (nula para $k < 0$) puede escribirse como

$$x(k) = x(0)\delta(k-0) + x(1)\delta(k-1) + \cdots$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)\delta(k-i)$$

Convolución



Convolución

Debido a que el sistema es lineal, podemos aplicar el principio de superposición, y obtener la respuesta del sistema $y(k)$ cuando la entrada es $x(k)$ como la suma debida a cada uno de los impulsos (suponiendo condiciones iniciales nulas). Por tanto la respuesta $y(k)$ será de la forma:

$$y(k) = x(0)h(k-0) + x(1)h(k-1) + \cdots$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)h(k-i) = x(k) * h(k)$$

Convolución

El resultado anterior no debe sorprender, ya que al aplicar transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de la igualdad se tiene:

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k) * h(k)\}$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k)\}\mathcal{Z}\{h(k)\} = X(z)H(z)$$

Y la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso resulta ser la Función de Transferencia del sistema

$$\begin{tikzcd} \text{Respuesta al Impulso} \arrow[r, bend left, "\mathcal{Z}"] & \text{Función de Transferencia} \arrow[l, bend left, "\mathcal{Z}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Función Impulso Contínuo

Función $d_\Delta(t)$

$$d_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & t \in [0,\Delta] \\ 0 & t \notin [0,\Delta] \end{cases} \qquad \Delta > 0$$

Al área bajo la gráfica es 1

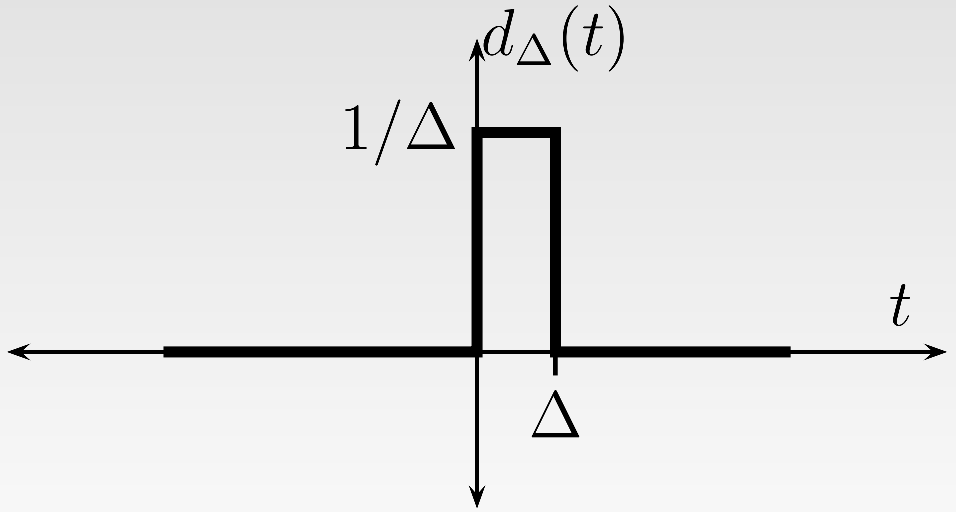


Figura 10: Función d_Δ

Función Impulso Contínuo

Se define la función *delta de Dirac* como la función que resulta al disminuir Δ progresivamente, hasta llevarlo al límite en que tiende a cero:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} d_\Delta(t)$$

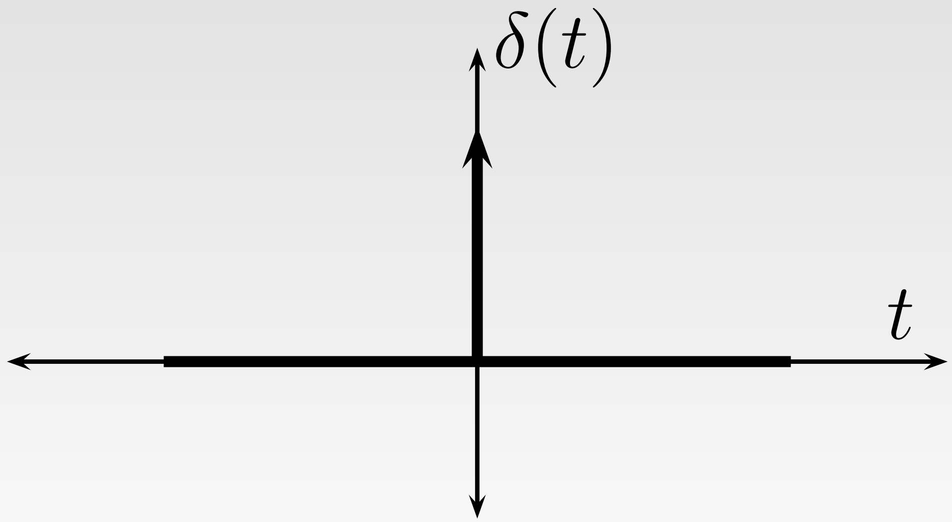


Figura 11: Función Impulso Unitario Contínuo

Función Impulso Contínuo

área bajo la gráfica es 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Area bajo la gráfica desde $-\infty$ hasta un valor t el resultado es la función *escalón unitario* $\mu(t)$

$$\int_{0^-}^{t} \delta(t)dt = \mu(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

Función Impulso Contínuo

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} x(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}}{s} = \frac{X(s)}{s}$$

Observese que la transformada de Laplace de $\mu(t)$, que es $1/s$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}\left\{\mu(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} \delta(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}}{s} = \frac{1}{s}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

Función Impulso Contínuo

Área del producto $d_\Delta(t-\tau)f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d_\Delta(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{\tau+\Delta} f(t)\frac{1}{\Delta}dt$$

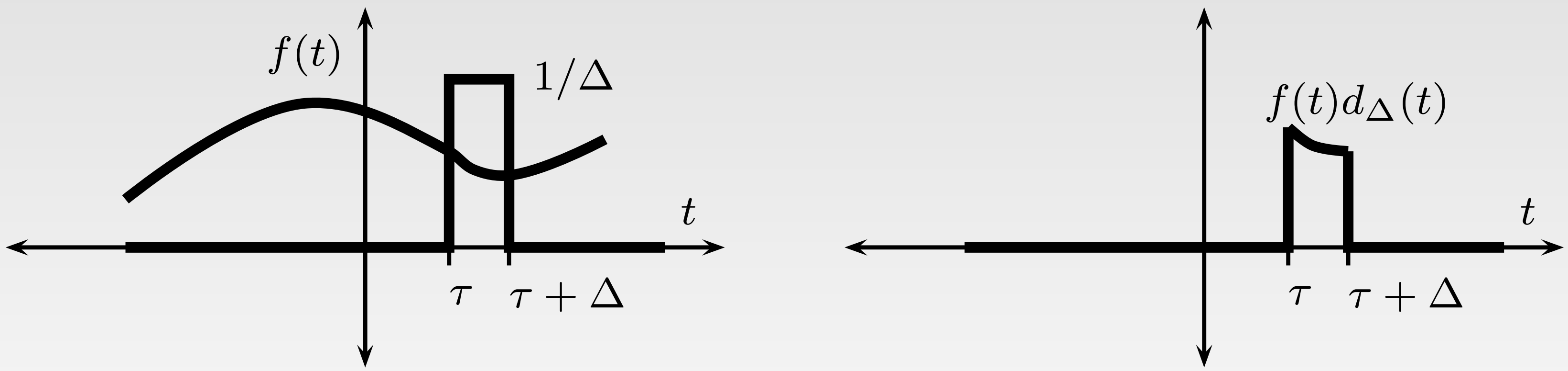


Figura 12: Función d_Δ

Función Impulso Contínuo

Para valores de Δ suficientemente pequeños, el área puede hacerse equivalente a la de un rectángulo de base Δ y altura $f(\tau)\frac{1}{\Delta}$, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d_{\Delta}(t-\tau)dt = \Delta f(\tau)\frac{1}{\Delta} = f(\tau)$$

El límite puede introducirse en la integral, con lo que se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\lim_{\Delta\to 0} d_{\Delta}(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \tag{1}$$

Función Impulso Contínuo

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \longrightarrow \boxed{F(s)} \longrightarrow H(s)$$

Figura 13: Sistema Dinámico Contínuo estimulado con el impulso unitario

$$H(s) = U(s)F(s) = 1F(s) = F(s)$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Respuesta al Impulso} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{L}"] & & \text{Función de Transferencia} \arrow[ll, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$