Introducción a los Sistemas no Lineales

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Introducción a los Sistemas no Lineales

- Aplicabilidad limitada a los sistemas lineales.
- Los sistemas no lineales pueden tener un comportamiento de mayor riqueza.

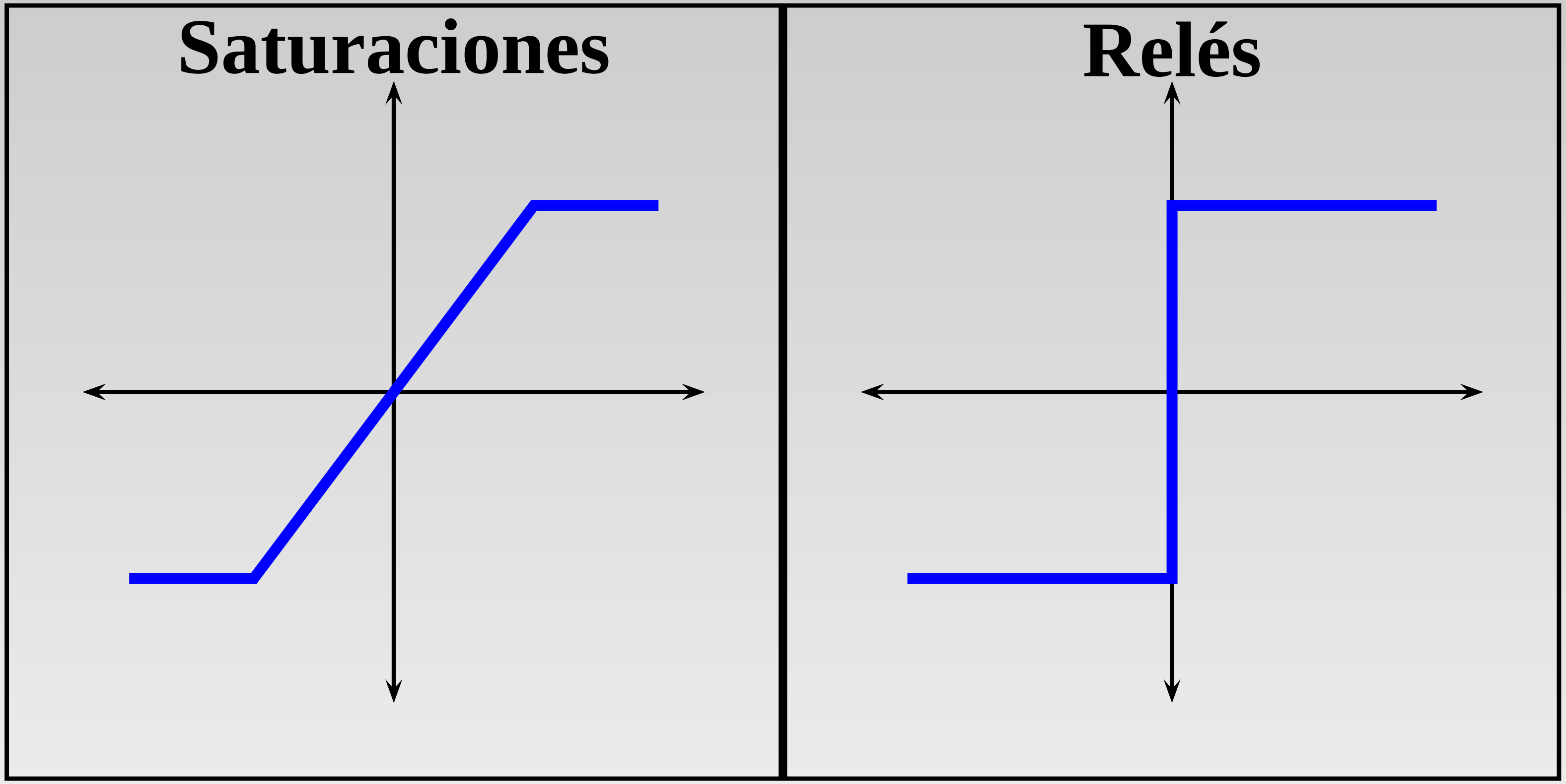
Tipos de funciones No Lineales Estáticas

- Válvulas de apertura Gradual
- Transformadores y Motores en regiones de saturación Magnica
- Materiales Ferromagnéticos en general

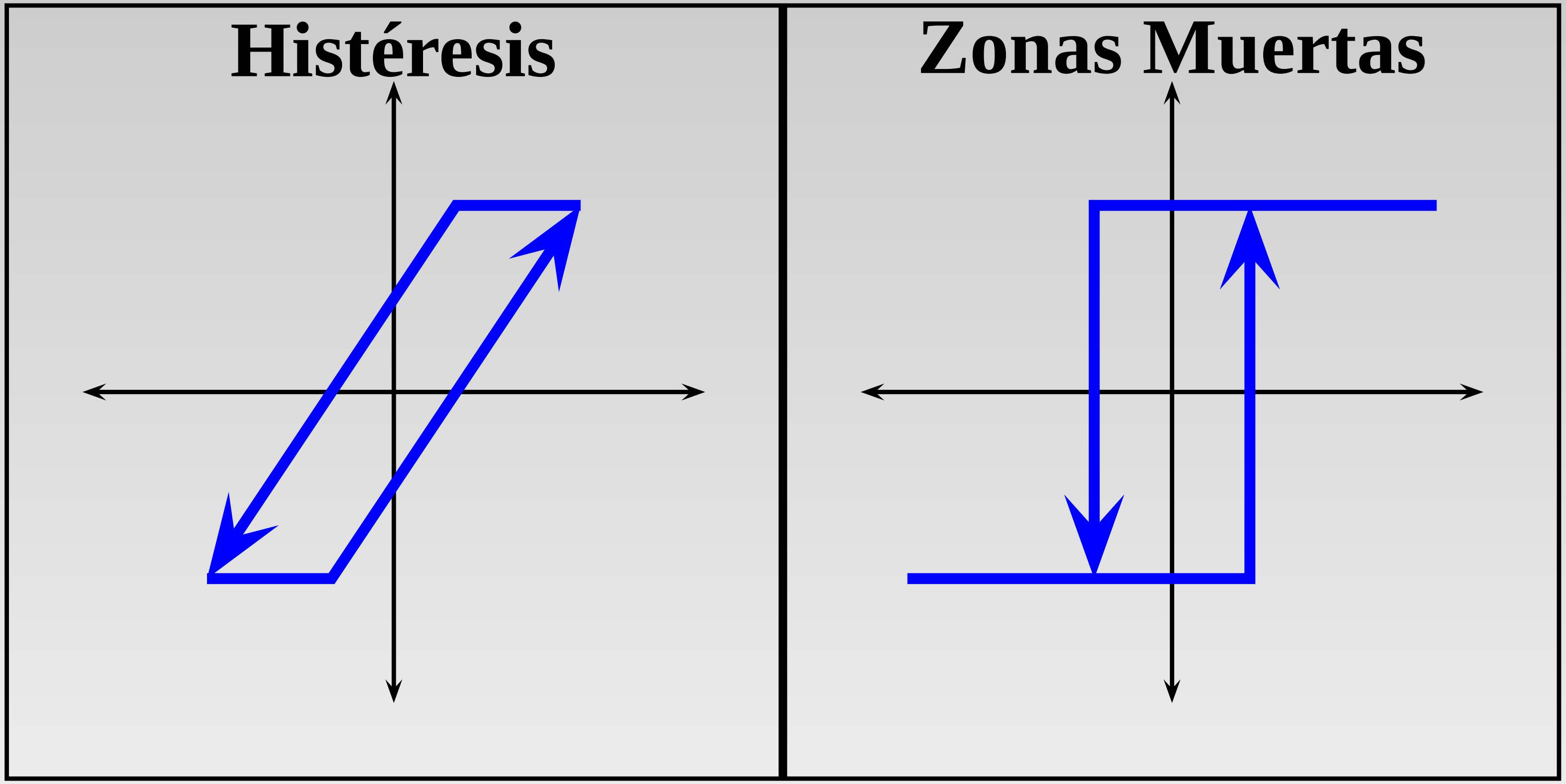
Tipos de funciones No Lineales Estáticas

- Huelgos en Engranajes
- Cilindros hidraúlicos y neumáticos con cambio de dirección
- Linealizaciones de elementos eléctricos y electrónicos

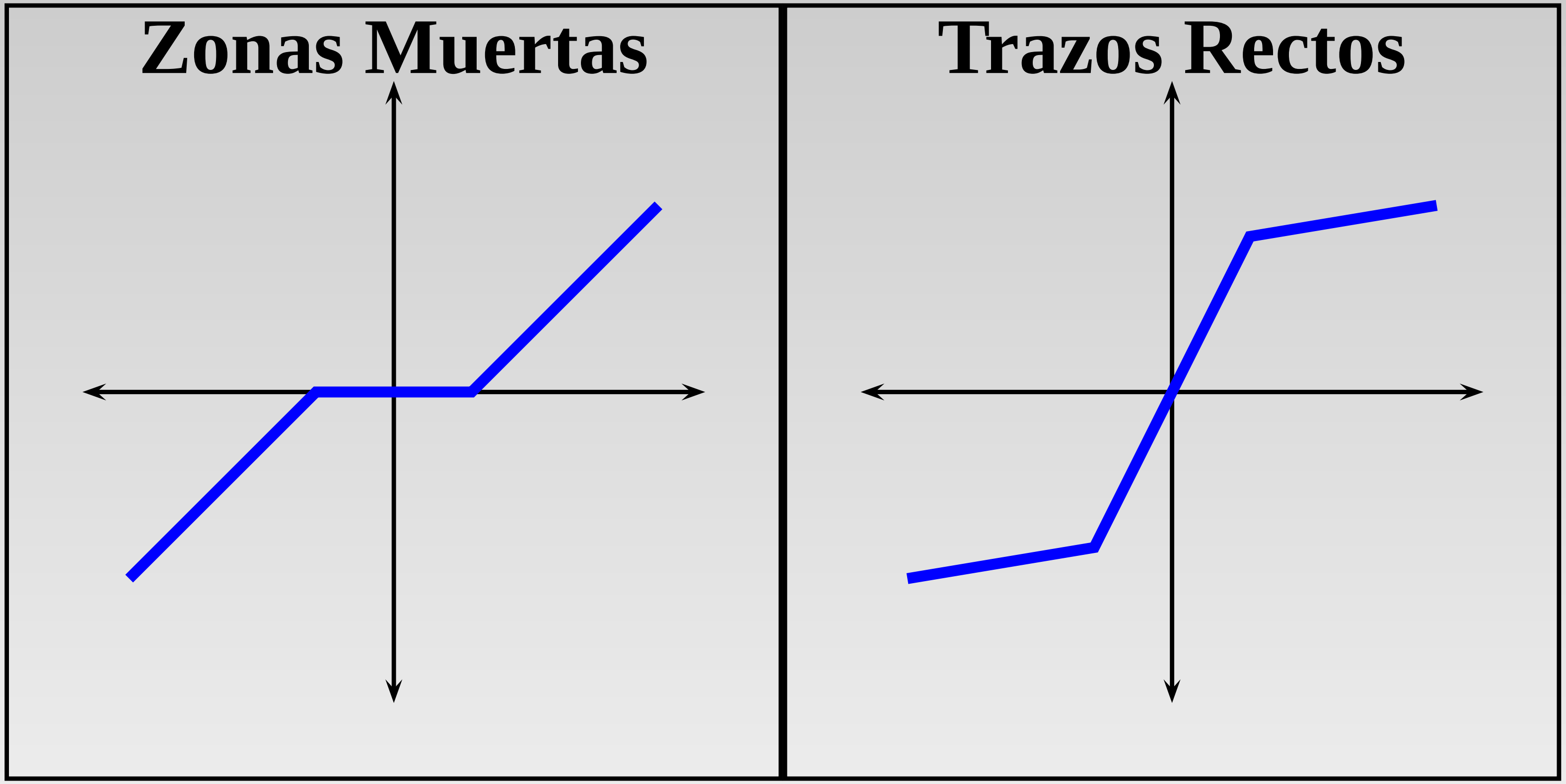
Tipos de funciones No Lineales Estáticas



Tipos de funciones No Lineales Estáticas



Tipos de funciones No Lineales Estáticas



No Linealidades Dinámicas

Consideramos ecuaciones diferenciales y de diferencia de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

$\mathbf{u}$ las entradas al sistema, $\mathbf{x}$ las variables de estado, y $\mathbf{f}$ es un función vectorial no lineal

Pérdida de Superposicición y Proporcionalidad

Las propiedades de *Superposición* y *Proporcionalidad* son inherentes a los sistemas lineales. Estas dos propiedades se pierden en los sistemas No Lineales.

Ejemplo

Consideremos un sistema continuo descrito por la ecuación.

$$\dot{x} + \epsilon x^2 = u(t)$$

No es lineal debido al término x^2

Ejemplo

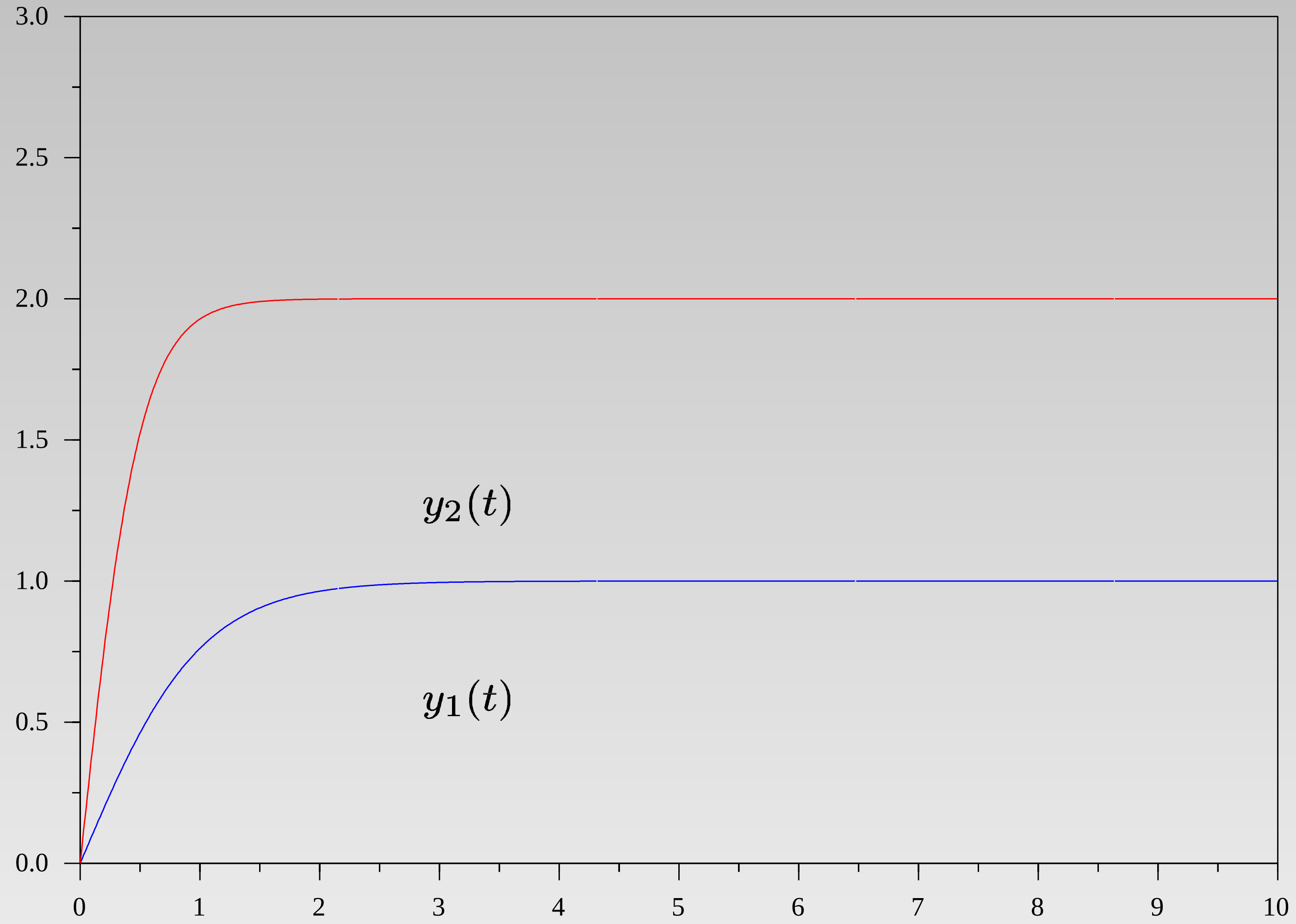


Figura 1: Sistema No Lineal con dos entradas escalón

Ejemplo

En la figura se ve el comportamiento del sistema con $\epsilon = 1$ y condiciones iniciales nulas ante dos entradas diferentes:

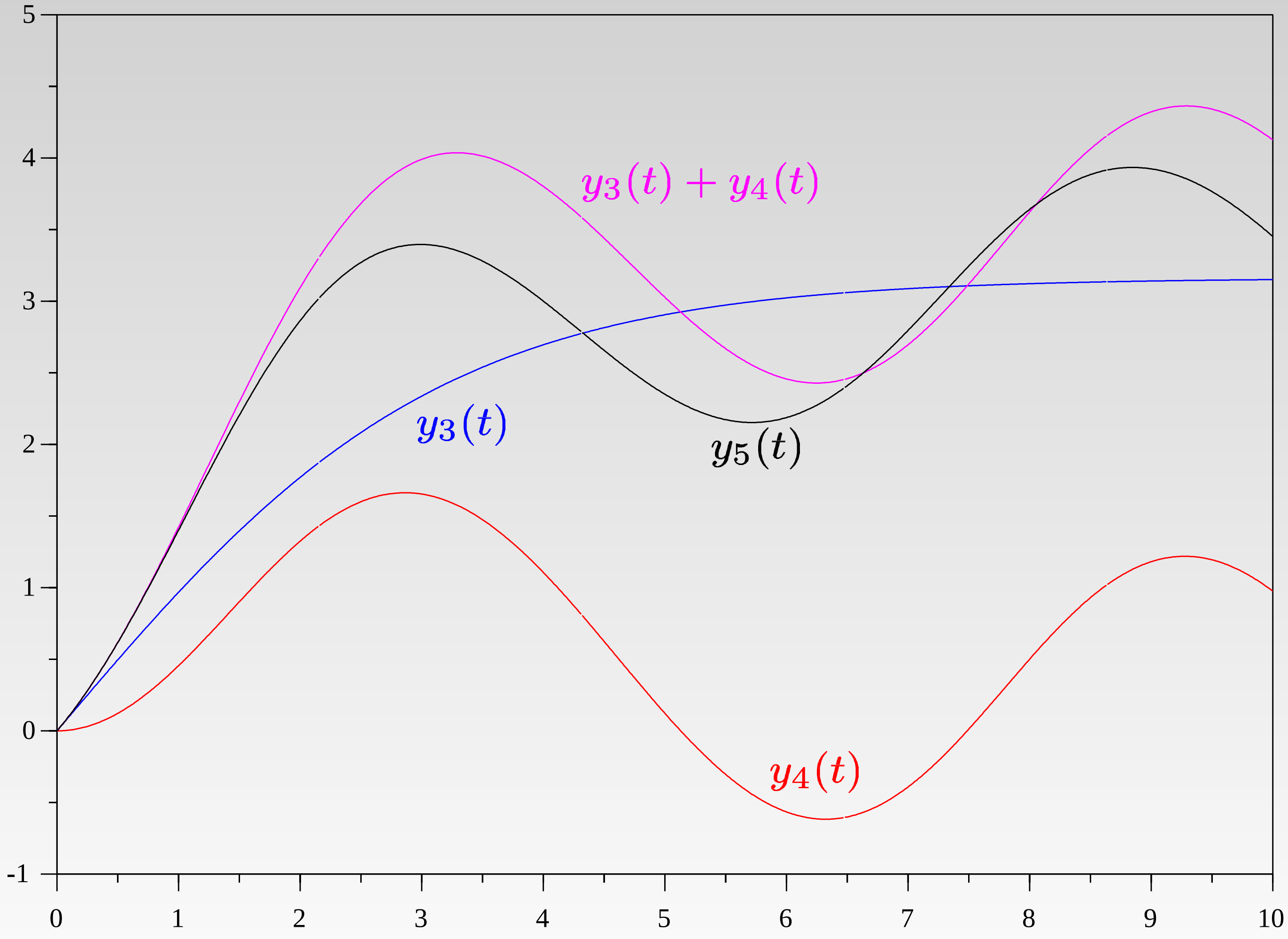
- Se ha simulado la salida $y_1(t)$ con una entrada $u_1(t) = \mu(t)$.
- Se ha simulado la salida $y_2(t)$ con una entrada $u_2(t) = 4\mu(t)$.

Otro Ejemplo

Ahora suponemos $\epsilon = 0.1$ manteniendo condiciones iniciales nulas. Se ha simulado el comportamiento del sistema en tres condiciones diferentes:

- Se ha simulado la salida $y_3(t)$ con una entrada $u_3(t) = \mu(t)$.
- Se ha simulado la salida $y_4(t)$ con una entrada $u_4(t) = \sin(t)\mu(t)$.
- Se ha simulado la salida $y_5(t)$ con una entrada $u_5(t) = \mu(t) + \sin(t)\mu(t)$.

Otro Ejemplo



Otro Ejemplo

Se ve $y_3(t)$, $y_4(t)$, $y_3(t) + y_4(t)$ y $y_5(t)$.

La suma $y_3(t) + y_4(t)$ es diferente de la salida que se obtiene cuando la entrada es $u_3(t) + u_4(t)$.

Múltiples Puntos de Equilibrio

- Un punto de equilibrio de un sistema continuo es un punto $\mathbf{x}_0$ tal que $\dot{\mathbf{x}}(t)$ en ese punto valga cero, ya que en esas condiciones el sistema no cambiará nunca de estado.

- Por otra parte, un punto de equilibrio de un sistema discreto es un punto $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$ en ese punto valga cero, ya que en esas condiciones el sistema no cambiará nunca de estado.

Múltiples Puntos de Equilibrio

- Si consideramos un sistema continuo lineal libre de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, es claro que el único punto de equilibrio que existe corresponde a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sin embargo, pueden existir sistemas no lineales con más de un punto de equilibrio.

Ejemplo

Tomemos como ejemplo un *Péndulo Simple* de barra rígida cuyas ecuaciones dinámicas son

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2$$

Ejemplo

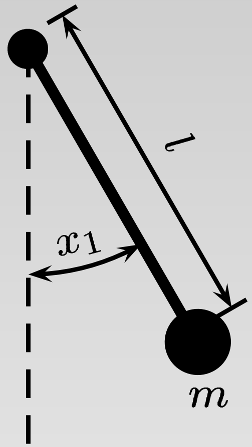


Figura 3: Diagrama del péndulo simple

Ejemplo

en donde

- x_1 representa el ángulo de giro del péndulo medido respecto a la vertical en el punto de giro.
- x_2 representa la velocidad angular.
- $a = g/l, b = k/m$

Ejemplo

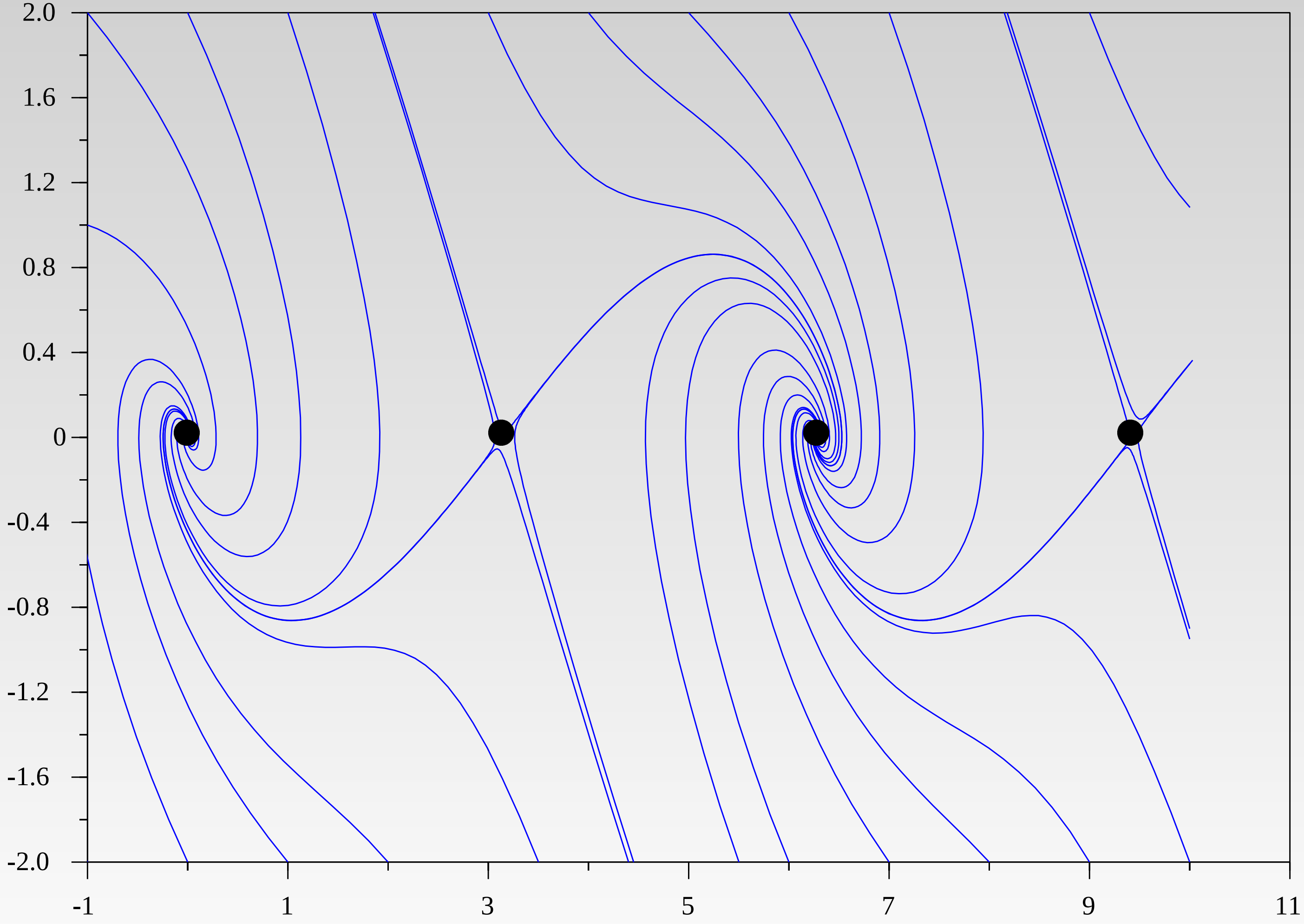
- g es la aceleración de la gravedad.
- l es la distancia del punto de giro al centro de gravedad del péndulo.
- k es el coeficiente de fricción viscosa del punto de giro.
- m es la masa del péndulo.

Ejemplo

Para que $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ sean cero se necesita que $x_2 = 0$ y $\sin(x_1) = 0$, es decir que los puntos de equilibrio son:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pm\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pm 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pm 3\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

Ejemplo



Estabilidad Local

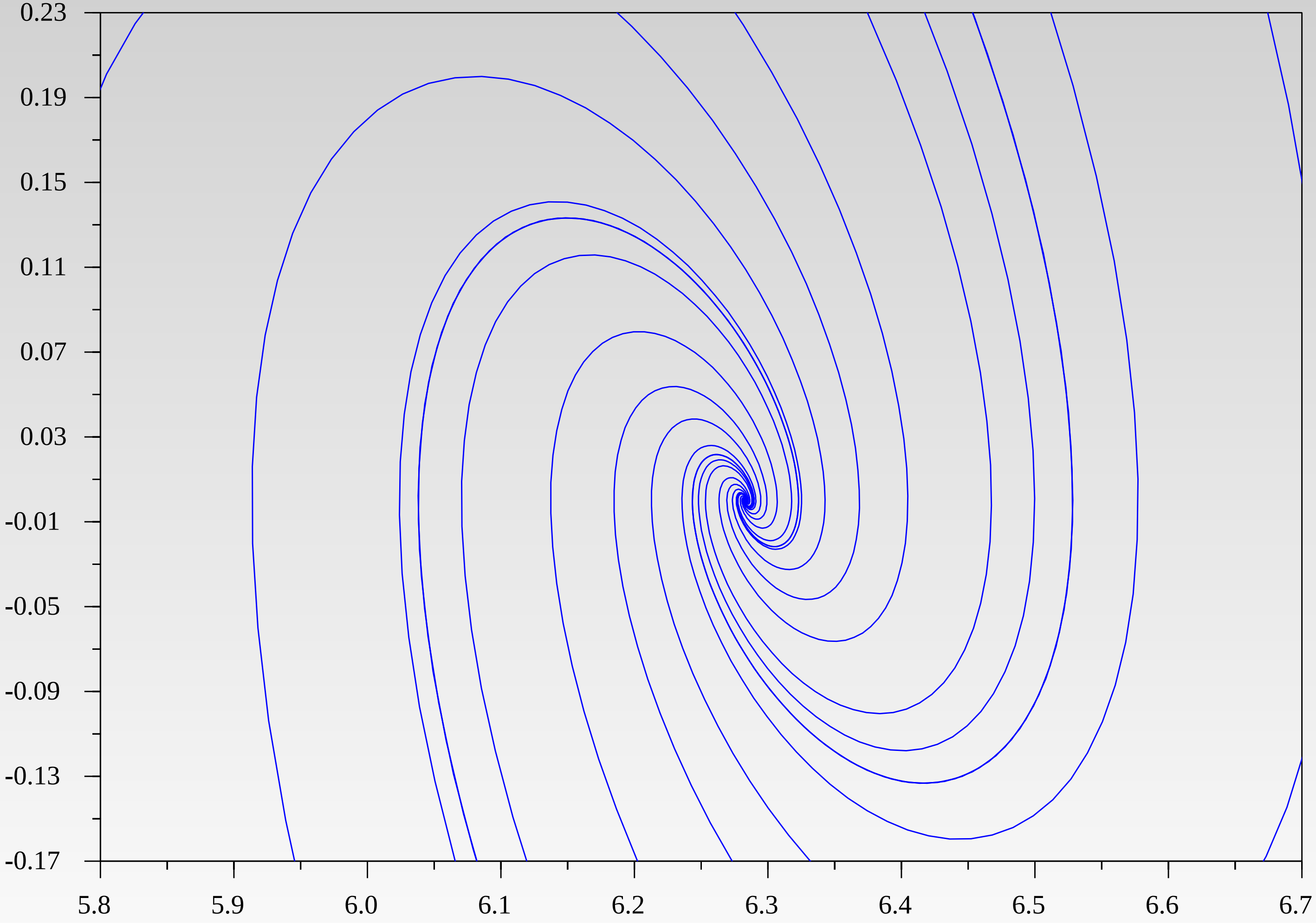
Para conocer el comportamiento del sistema en todos los puntos de equilibrio basta con analizarlo en dos de ellos (un ángulo θ es igual a un ángulo $\theta \pm 2n\pi$):

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

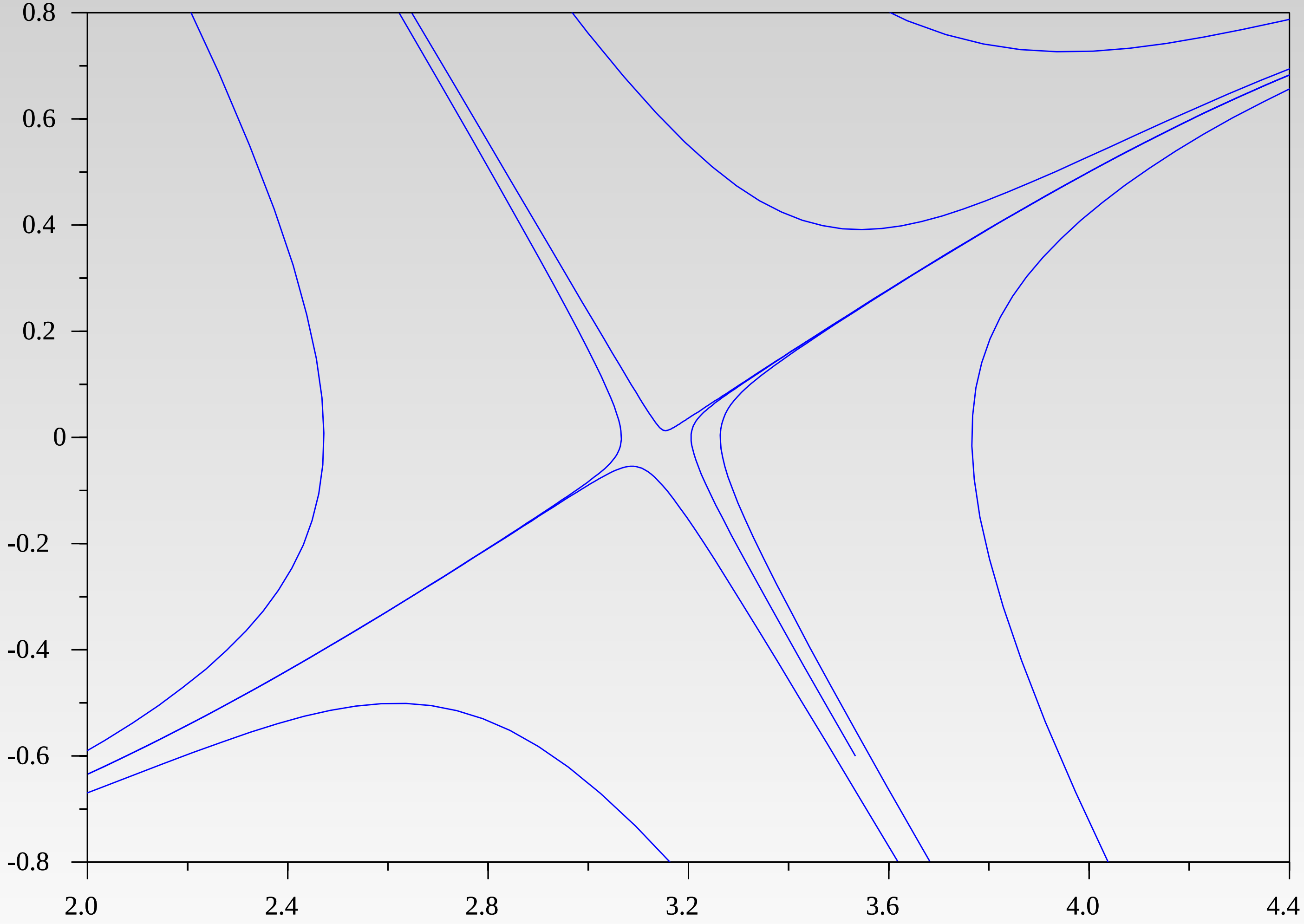
Punto de equilibrio $\mathbf{x}_a$. El retrato de fase resultante es similar al de un *sifón* de un sistema lineal.

Ejemplo



0.23
0.19
0.15
0.11
0.07
0.03
-0.01
-0.05
-0.09
-0.13
-0.17
5.8
5.9
6.0
6.1
6.2
6.3
6.4
6.5
6.6
6.7

Ejemplo



Órbitas periódicas no sinusoida-les

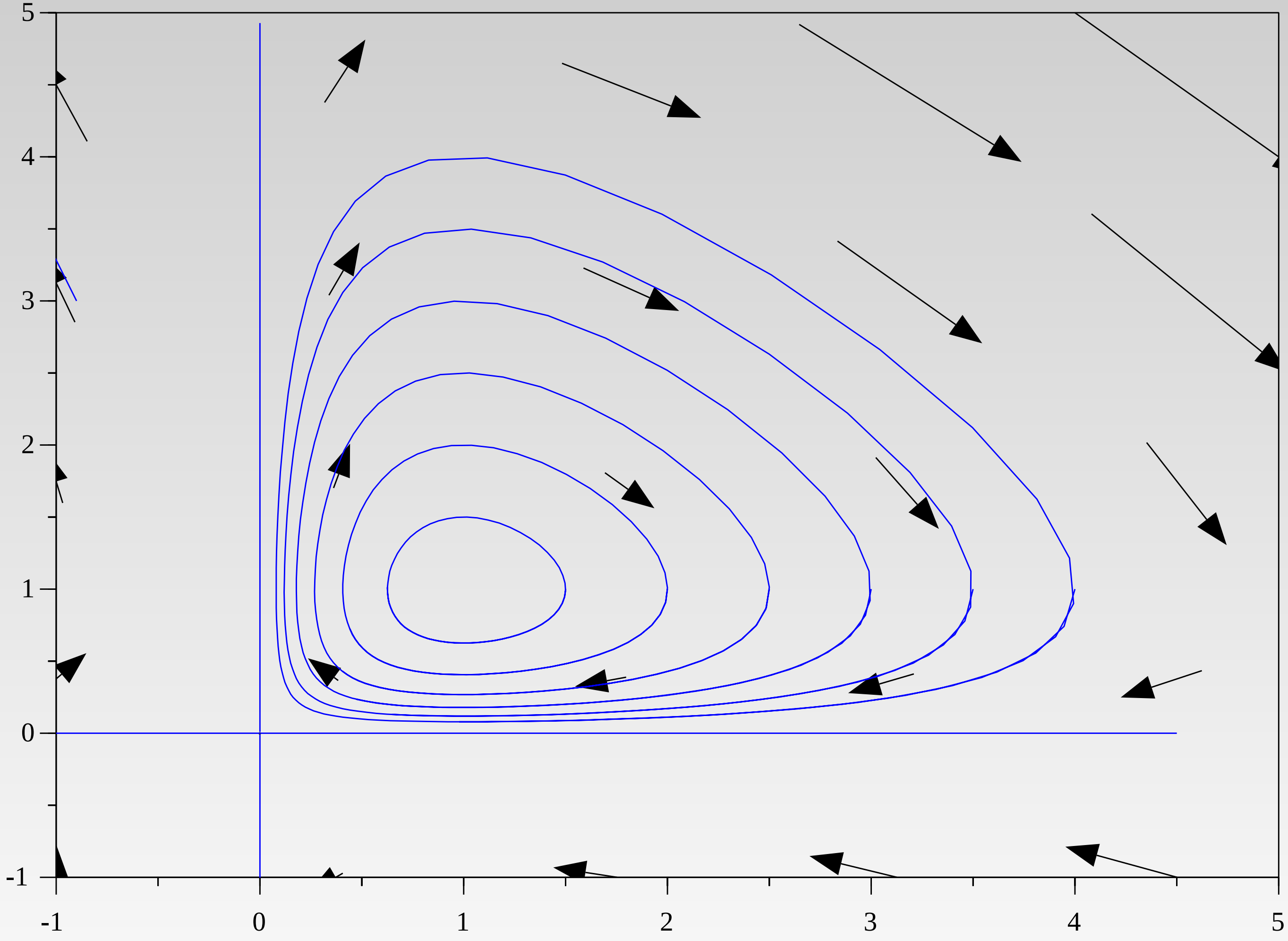
- En un sistema lineal la única posibilidad de tener soluciones periódicas se tiene cuando los valores propios son imaginarios puros; en estos casos las trayectorias del retrato de fase son elipses y se denominan *órbitas cerradas* del sistema.
- En los sistemas no lineales hay otras posibilidades de tener soluciones periódicas, que no necesariamente corresponderán a elipses en los retratos de fase.

Ejemplo

Supóngase un sistema descrito por las ecuaciones de *Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

Ejemplo



Ejemplo

- Punto de equilibrio en $(1, 1)$
- Punto de equilibrio en $(0, 0)$
- Infinitas soluciones periódicas

Ciclos Límite

En ocasiones las trayectorias del sistema tienden a formar una órbitas cerrada; cuando esto sucede se dice que existe un *ciclo límite estable*. También se da el caso en el que las trayectorias se desprenden de una órbita cerrada, en cuyo caso se dice que se existe un *ciclo límite inestable*.

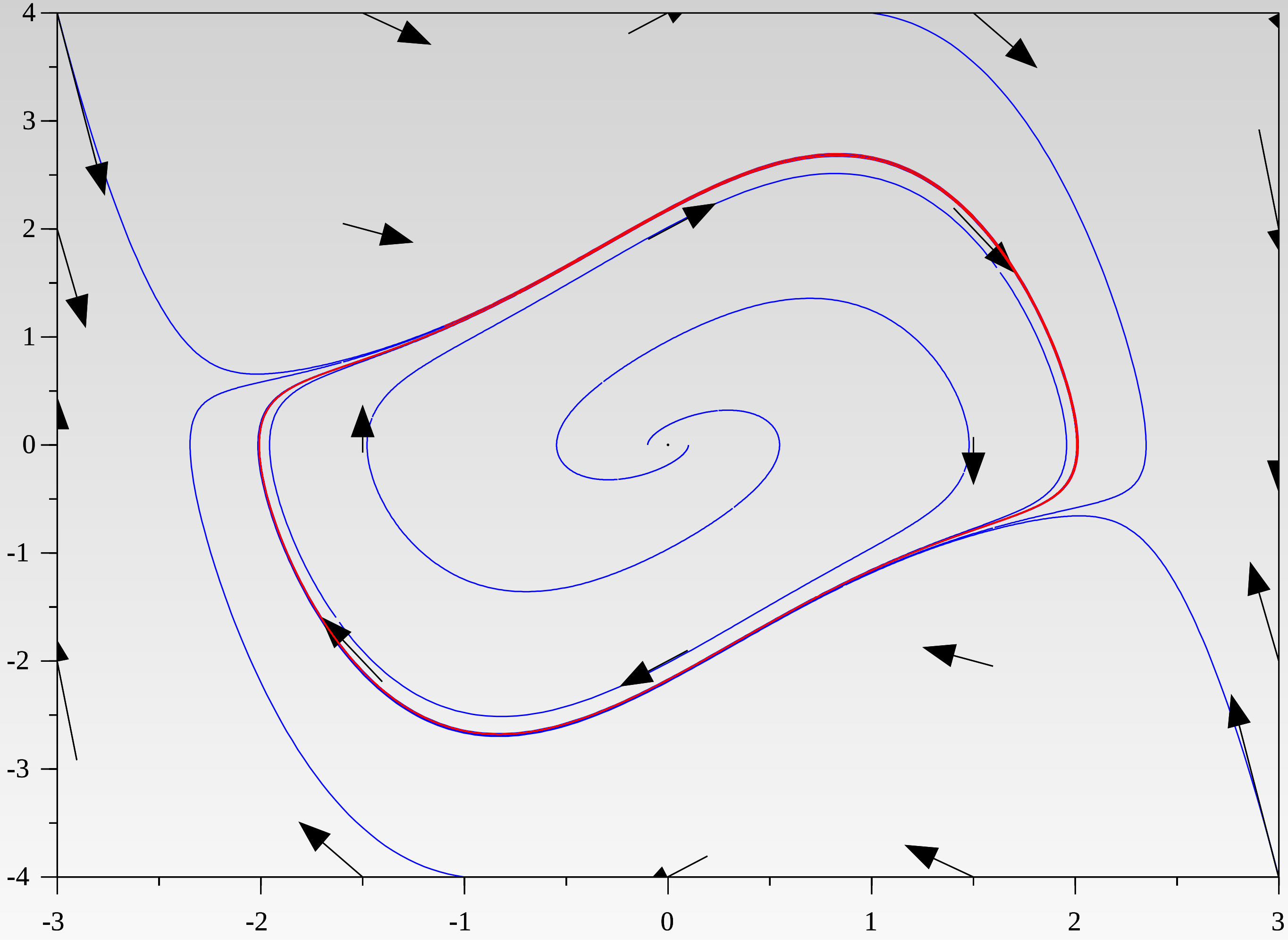
Ejemplo

Supóngase un sistema descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_2 \end{aligned}$$

La ecuación representa al *Oscilador de Van der Pol*, y corresponde a un oscilador con un amortiguamiento no lineal correspondiente al término proporcional a $x_1^2 x_2$.

Ejemplo



Órbitas Homoclínicas

- En un sistema lineal, cuando el punto de equilibrio es del tipo punto de silla, una trayectoria que inicie en el vector propio inestable viajará por ese vector hasta el infinito.
- En algunos sistemas no lineales puede darse un comportamiento especial: una trayectoria que inicie en un punto de equilibrio del tipo punto de silla puede llegar a terminar en el mismo punto de equilibrio. Cuando esto sucede, la trayectoria descrita se denomina una *órbita homoclínica*

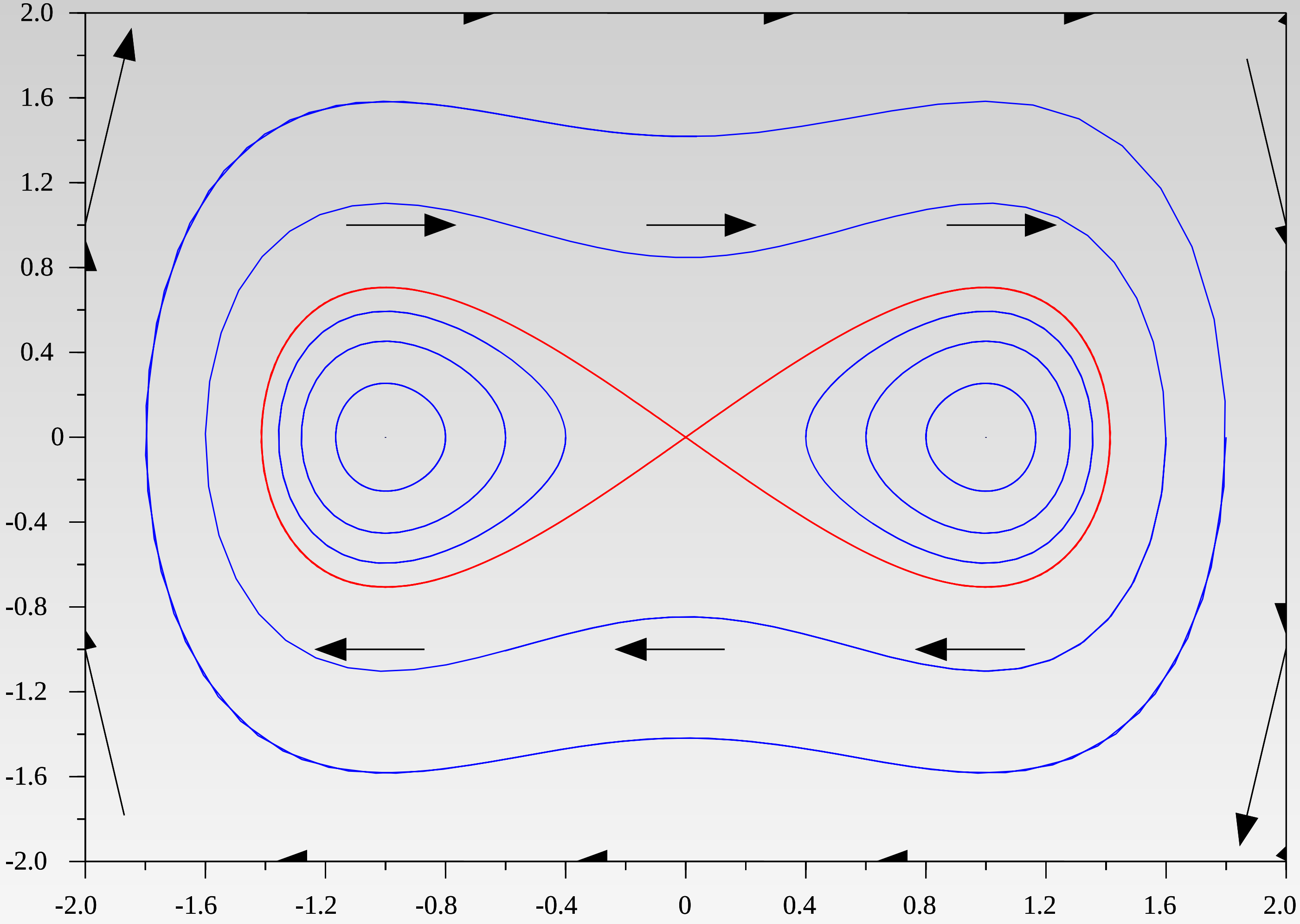
Ejemplo

Supóngase un sistema descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 + x_1 - x_1^3\end{aligned}$$

La ecuación representa al *Oscilador de Duffing*, y corresponde a un oscilador con una excitación adicional.

Ejemplo



Ejemplo

- La figura muestra el retrato de fase; con $k = 0$ (sin amortiguamiento).
- Puntos de equilibrio: en $(1, 0)$ y en $(-1, 0)$
- Puntos de equilbrio del tipo centro; en $(0, 0)$
- Punto de equilibrio del tipo punto de silla.

Bifurcaciones

- Si las ecuaciones de un sistema dinámico dependen de un parámetro, es lógico pensar que el comportamiento de dicho sistema dependa del valor de ese parámetro.
- Sin embargo, las variaciones de comportamiento que puede tener un sistema lineal son menores en comparación con las que pueden suceder en sistemas no lineales. Si al variar un parámetro el comportamiento del sistema cambia *estructuralmente* (de forma muy notoria), se dice que el parámetro ha tomado un *valor de bifurcación*.

Ejemplo

Consideremos el sistema descrito por la ecuación

$$\dot{x} = (\alpha - x^2)x$$

Para valores negativos de α el sistema tendrá un único punto de equilibrio en $x = 0$, porque es la única condición en la que $\dot{x} = 0$. Sin embargo, si $\alpha \geq 0$ existirán tres puntos de equilibrio en $x_1 = 0, x_2 = +\sqrt{a}, x_3 = -\sqrt{a}$. α es 0.

Comportamientos caóticos

- El comportamiento de un sistema dinámico, lineal o no lineal, depende de las condiciones iniciales. En los sistemas lineales esta dependencia es suave, es decir, que si se escogen dos condiciones iniciales cercanas, el comportamiento del sistema será muy parecido.
- Existen algunos sistemas no lineales en los que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales desencadenan comportamientos muy diferentes; tales sistemas se denominan *caóticos*.

Ejemplo

Consideremos el sistema discreto de primer orden descrito por la ecuación:

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)/4 & x \in [0, 18/41) \\ 10x - 4 & x \in [18/41, 1/2) \\ 10x - 5 & x \in [1/2, 23/41) \\ (3-x)/4 & x \in [23/41, 1] \end{cases}$$

Ejemplo

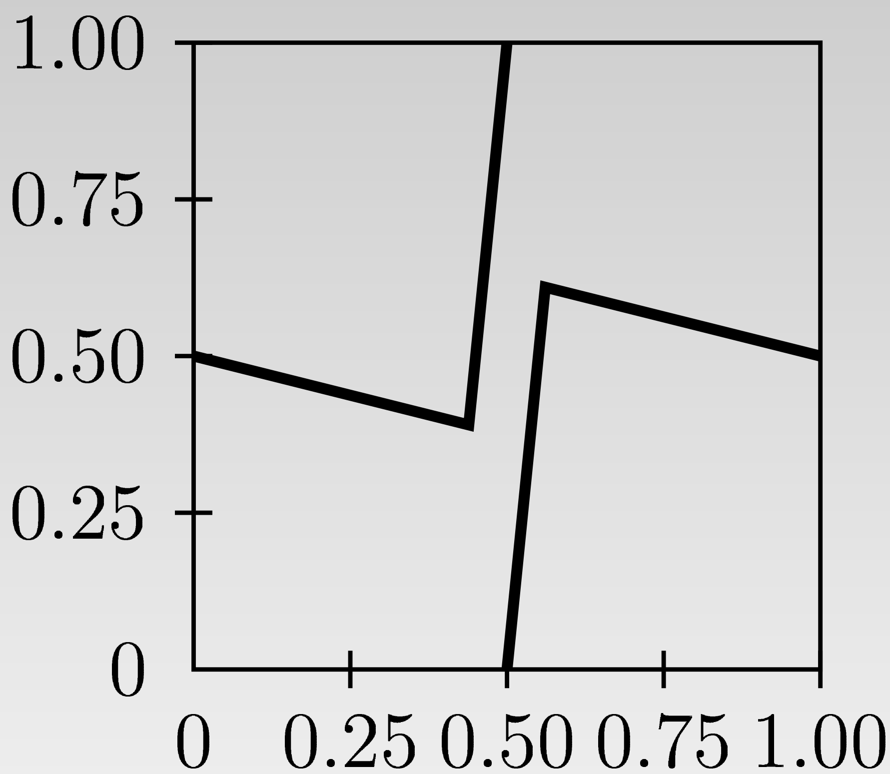


Figura 10: Función discreta que origina un sistema caótico

Ejemplo

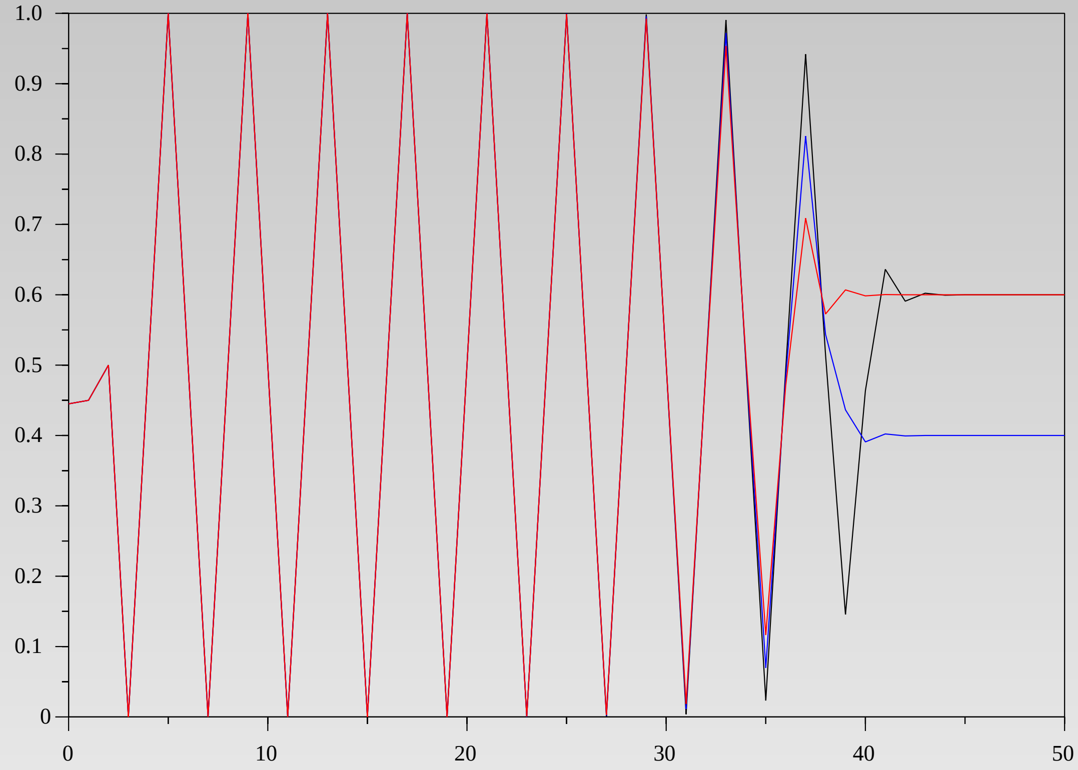


Figura 11: Respuesta de un sistema discreto caótico a tres entradas diferentes:$x_a = 0.445 + 1E - 11$,$x_b = 0.445 + 3E - 11$ y $x_c = 0.445 + 5E - 11$