

Sistemas Realimentados Simples

Estabilidad de Sistemas Contínuos

Diagramas de Bode

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Sistema Continuo

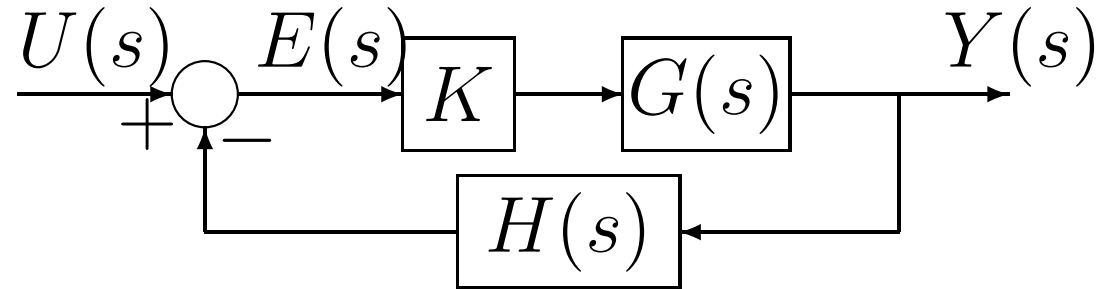
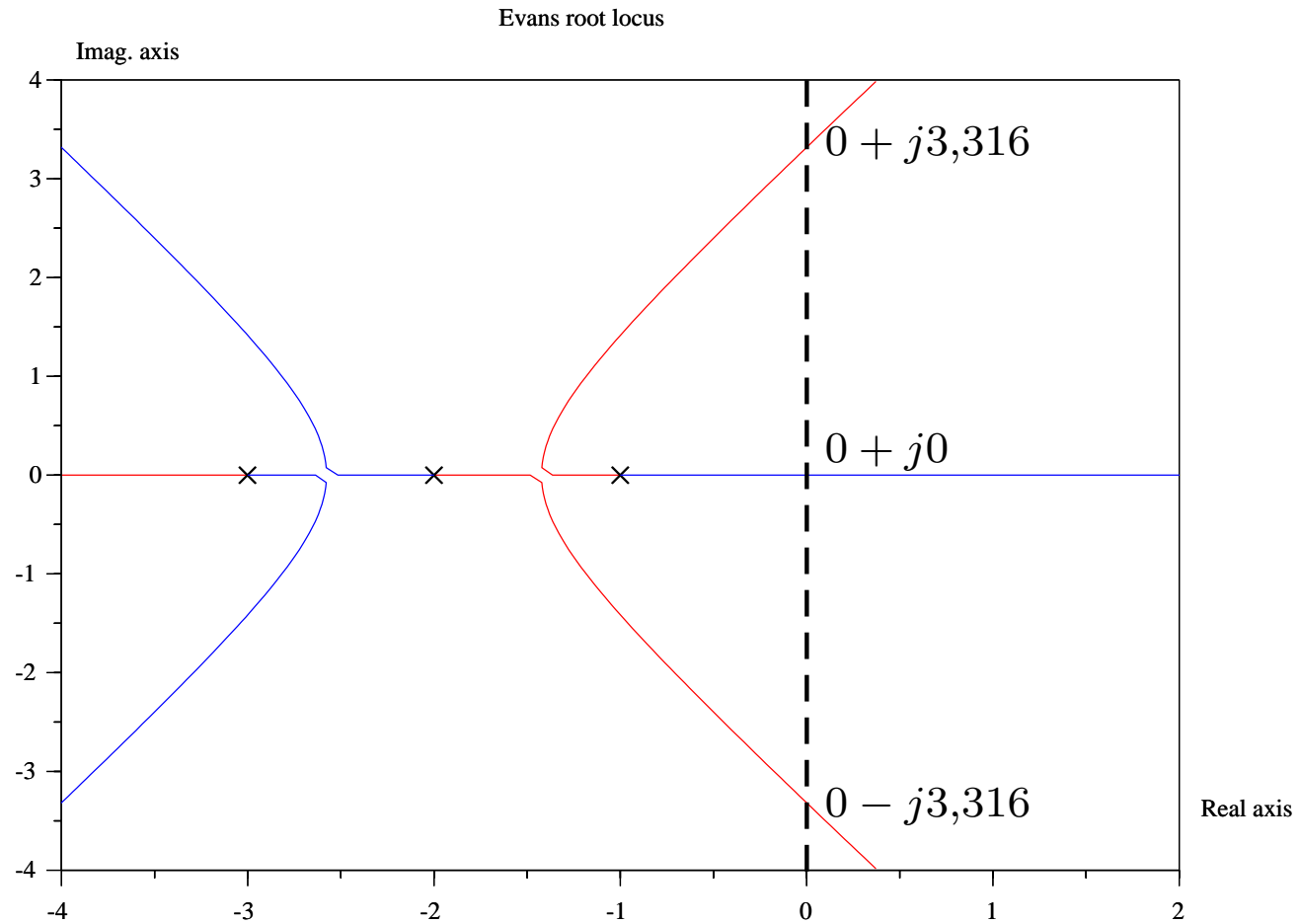


Figura 1: Sistema continuo retroalimentado simple

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

¿ $F(s)$ es estable?, es decir, ¿sus polos están en el semi-plano izquierdo?

Root-Locus



Root Locus
Root Locus Complementario

Root-Locus

- El root-locus muestra la ubicación de los polos cuando cambia el valor de k .
- Para estudiar la estabilidad del sistema, se analizan los puntos en los cuales las ramas del root-locus cruzan el eje imaginario que son los puntos en donde puede cambiar la estabilidad del sistema realimentado.
- El root-locus es simétrico respecto al eje horizontal; basta con estudiar la mitad positiva.
- Los puntos del plano complejo que forman parte del root-locus son tales que el ángulo de $G(s)H(s)$ es $\pm 180^\circ$ o 0° .

Otra alternativa

En lugar de estudiar en dónde están ubicadas las ramas del root-locus en todo el plano complejo, centrar nuestra atención únicamente en el eje imaginario positivo, y detectar cuándo es atravesado por alguna rama del root-locus

Los puntos en donde puede cambiar la estabilidad del sistema realimentado coincide con aquellos puntos $j\omega$ del eje imaginario en donde

$$\arg \{G(j\omega)H(j\omega)\} = \begin{cases} \pm 180^\circ \\ 0^\circ \end{cases} \quad (1)$$

Criterio de Bode

Para encontrar cuáles son los valores de ω que satisfacen esas condiciones pueden trazarse los *diagramas de bode* de $G(s)H(s)$ y buscar gráficamente en el diagrama de fase cuáles son los puntos en donde el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ vale $\pm 180^\circ$ o 0°

Root-Locus y Bode

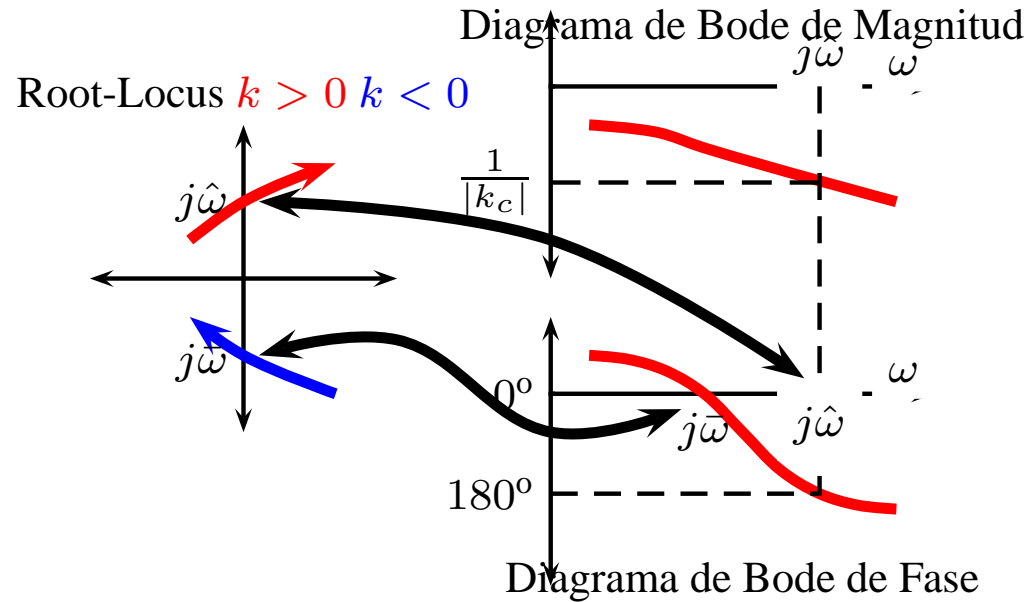


Figura 2: Relación entre el root-locus y los diagramas de Bode

Criterio de Bode

Para determinar los valores de k en los cuales la rama del root-locus atraviesa el eje imaginario, puede emplearse nuevamente

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{|k|}$$

El valor de $|G(j\omega)H(j\omega)|$ puede leerse (en decibeles) en el diagrama de bode de magnitud. A partir de ese valor, y empleando la ecuación anterior puede determinarse los valores de k para los cuales una rama del root-locus atraviesa el eje imaginario (k_c en la figura).

Márgenes de Estabilidad

Exsten dos condiciones que deben cumplir los puntos $j\omega$ del plano complejo para formar parte del Root-Locus o del Root-Locus Complementario; una de las condiciones hace referencia a la *Gananacia* de $G(s)H(s)$ y la otra a su *Fase*. La idea de los *Márgenes de Estabilidad* consiste en suponer que $k = 1$, y explorar qué margen se tiene cuando se cumple una de esas condiciones:

Márgenes de Estabilidad

Margen de Ganancia: El Margen de Ganancia consiste en el menor valor por el que se debe amplificar la ganancia de $G(s)H(s)$ cuando se satisface la condición

$$\arg \{G(j\omega)H(j\omega)\} = \begin{cases} \pm 180^\circ \\ 0^\circ \end{cases}$$

para que simultáneamente se cumpla la condición

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{|k|}$$

Márgenes de Estabilidad

Margen de Fase: El Margen de Fase consiste en el menor valor que se le debe sumar al ángulo de $G(s)H(s)$ cuando se satisface la condición

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{|k|}$$

para que simultáneamente se cumpla la condición

$$\arg \{G(j\omega)H(j\omega)\} = \begin{cases} \pm 180^\circ \\ 0^\circ \end{cases}$$

Márgenes de Estabilidad, $k > 0$

- El margen de ganancia puede leerse (en decibeles) en los diagramas de bode como el valor negativo de la ganancia a la frecuencia en la que la fase es de $\pm 180^\circ$. (*Cruce de fase*)
- El margen de fase puede leerse en los diagramas de bode como $180^\circ - \phi$, en donde ϕ es el ángulo a la frecuencia en la que la ganancia es de $0db$. (*Cruce de ganancia*)

Márgenes de Estabilidad, $k < 0$

- El margen de ganancia puede leerse (en decibeles) en los diagramas de bode como el valor negativo de la ganancia a la frecuencia en la que la fase es de 0° . (*Cruce de fase*)
- El margen de fase puede leerse en los diagramas de bode como $-\phi$, en donde ϕ es el ángulo a la frecuencia en la que la ganancia es de $0db$. (*Cruce de ganancia*)

Ejemplo

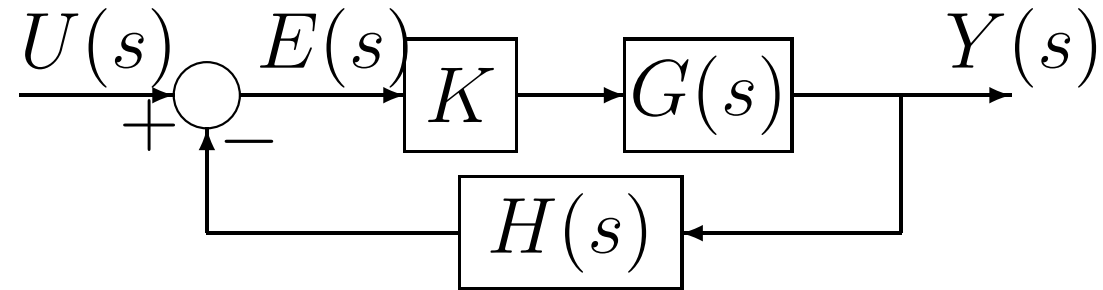
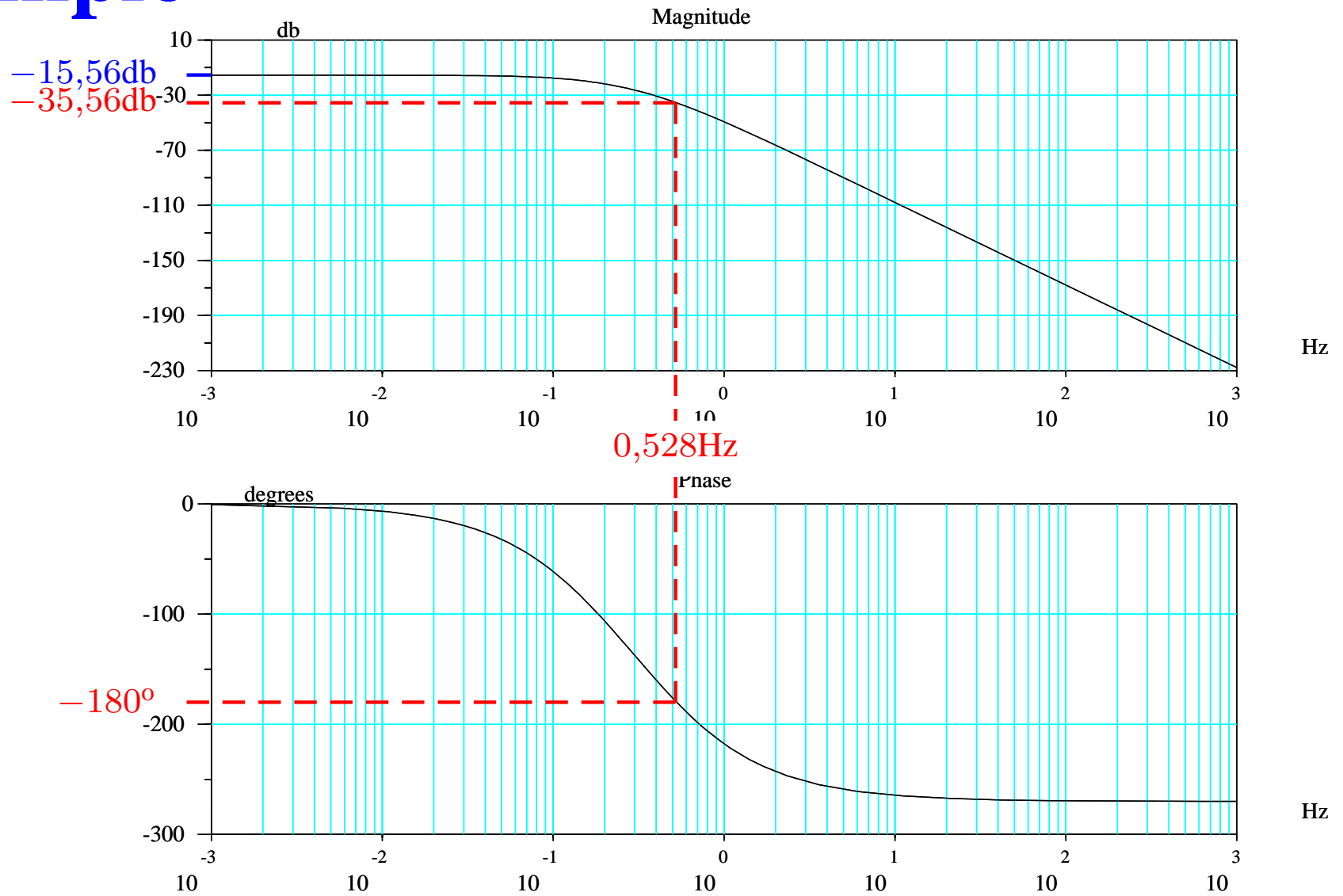


Figura 3: Sistema continuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \quad H(s) = \frac{1}{(s + 3)}$$

Ejemplo



Ejemplo

Los puntos en los cuales puede cambiar la estabilidad del sistema realimentado son aquellos en los que el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ es 0° o es $\pm 180^\circ$.

$G(j\omega)H(j\omega)$ es -180° para $F 0,528\text{Hz}$, es decir para $\omega = 2\pi 0,528 = 3,316$. En esa frecuencia el valor de la magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ es de $-35,56\text{db}$, lo que significa que la magnitud de k , en decibeles, para la cual una rama del Root-Locus atraviesa el eje imaginario es tal que $\frac{1}{|k|_{\text{en db}}} = -35,56$:

$$\frac{1}{|k|} = 10^{\frac{|k|_{\text{en db}}}{20}} \quad |k| = 10^{-\frac{|k|_{\text{en db}}}{20}}$$

$$|k| = 10^{-\frac{-35,56}{20}} = 60 \quad k = 60$$

Ejemplo

El diagrama de fase es asintótico a 0° , es decir, que para $w = 0$ el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ es 0° . El diagrama de magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ es asintótico a $-15,56\text{db}$, lo que significa que la magnitud de k , en decibeles, para la cual una rama del Root-Locus complementario atraviesa el eje imaginario es tal que $\frac{1}{|k|_{\text{en db}}} = -15,56$:

$$\frac{1}{|k|} = 10^{\frac{|k|_{\text{en db}}}{20}} \quad |k| = 10^{-\frac{|k|_{\text{en db}}}{20}}$$

$$|k| = 10^{-\frac{-15,56}{20}} = 6 \quad k = -6$$

Diagramas de Bode

El valor de una función de transferencia $F(s)$, para un s específico, es un número complejo cuya amplitud es $|F(s)|$ y cuyo ángulo es $\arg \{F(s)\}$. Los diagramas de Bode muestran cómo varía la amplitud y el ángulo de ese número complejo, cuando s toma todos los posibles valores del eje imaginario positivo ($s = j\omega$; $\omega \in (0, \infty)$). Específicamente se definen los siguientes diagramas:

- Diagrama de Magnitud
- Diagrama de Fase

Diagramas de Magnitud

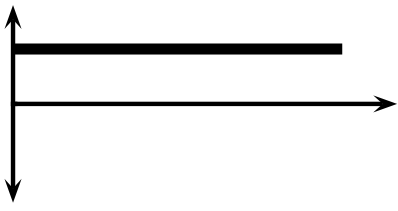

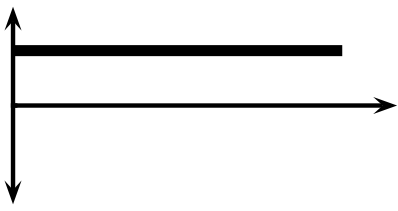
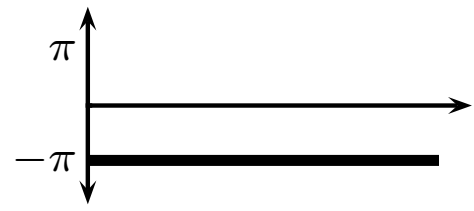
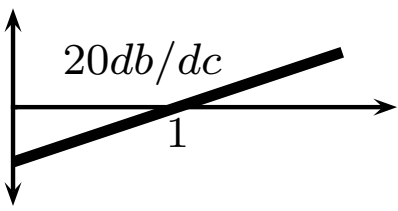
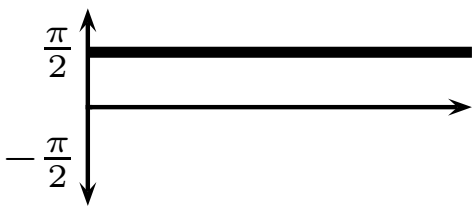
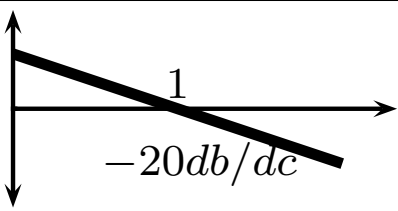
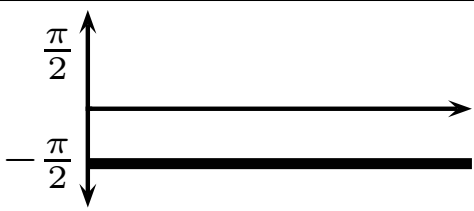
- La abscisa (eje horizontal) muestra el valor de ω en escala logarítmica.
- La ordenada (eje vertical) muestra la magnitud de $F(j\omega)$ medida en *decibeles*:

$$|F(j\omega)|_{\text{en db}} = 20 \log_{10} |F(j\omega)|$$

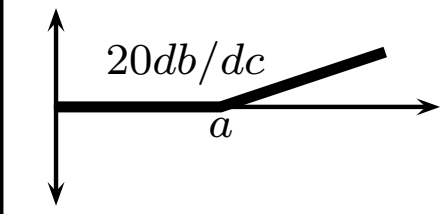
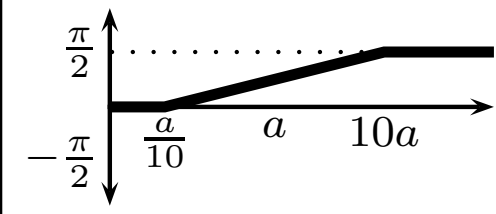
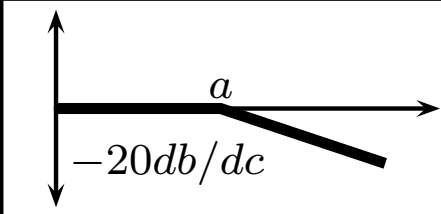
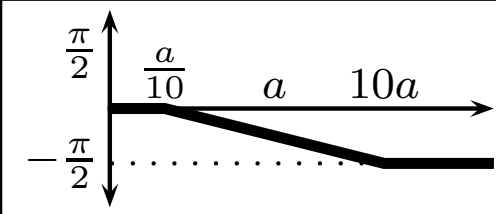
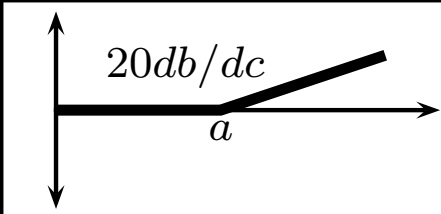
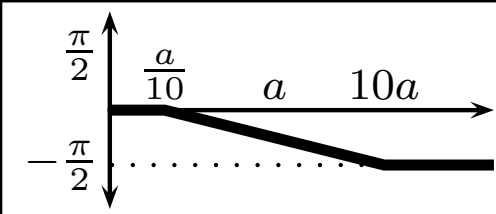
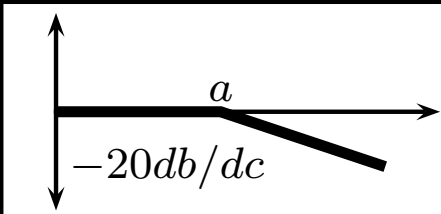
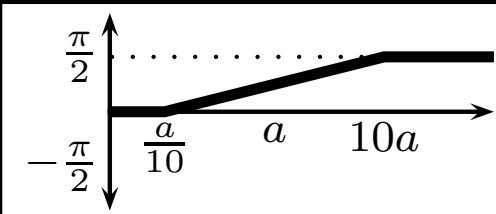
Diagrama de Fase

- La abscisa (eje horizontal) muestra el valor de ω en escala logarítmica.
- La ordenada (eje vertical) muestra el ángulo de $F(j\omega)$ medida en grados o radianes

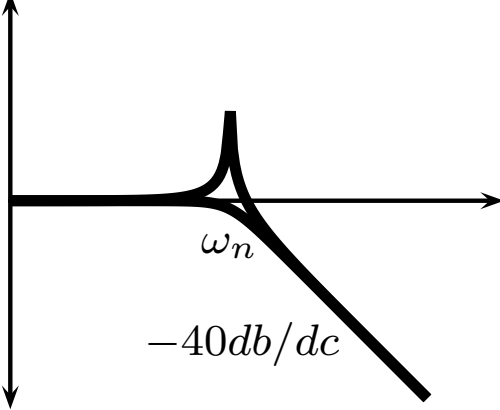
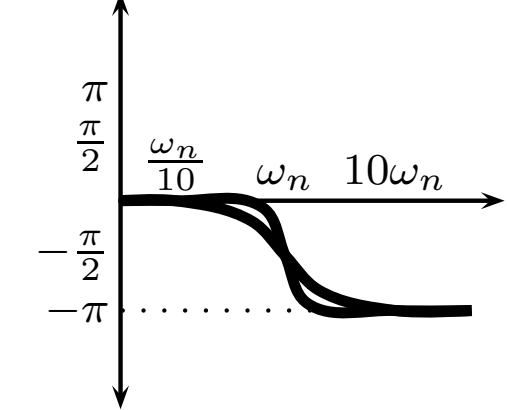
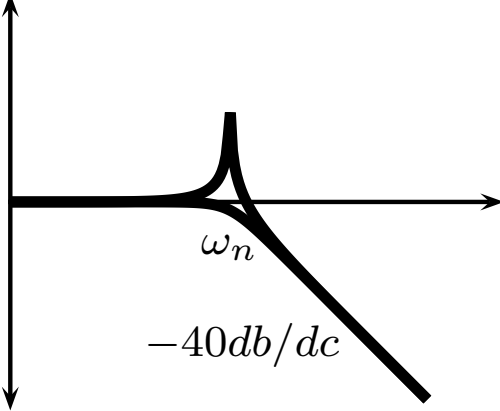
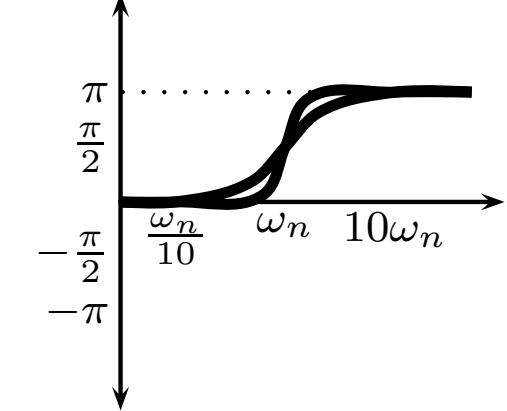
Primer Orden

$F(s)$	$ F(j\omega) $	$\arg F(j\omega)$
$k > 0$		
$k < 0$		
s		
$\frac{1}{s}$		

Primer Orden

$F(s)$	$ F(jw) $	$\arg F(jw)$
$\frac{s+a}{a} \quad a > 0$		
$\frac{a}{s+a} \quad a > 0$		
$\frac{s-a}{-a} \quad a > 0$		
$\frac{-a}{s-a} \quad a > 0$		

Segundo Orden

$F(s)$	$ F(j\omega) $	$\arg F(j\omega)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ <p>$\xi\omega_n > 0$</p>	 <p>ω_n</p> <p>$-40\text{db}/\text{dc}$</p>	 <p>$\frac{\pi}{2}$</p> <p>$-\frac{\pi}{2}$</p> <p>$-\pi$</p> <p>$\frac{\omega_n}{10}$ ω_n $10\omega_n$</p>
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ <p>$\xi\omega_n < 0$</p>	 <p>ω_n</p> <p>$-40\text{db}/\text{dc}$</p>	 <p>π</p> <p>$\frac{\pi}{2}$</p> <p>$-\frac{\pi}{2}$</p> <p>$-\pi$</p> <p>$\frac{\omega_n}{10}$ ω_n $10\omega_n$</p>

Segundo Orden

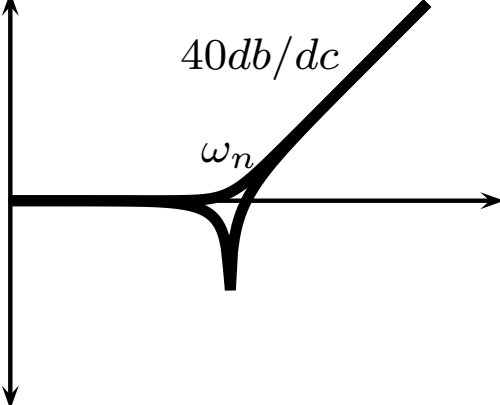
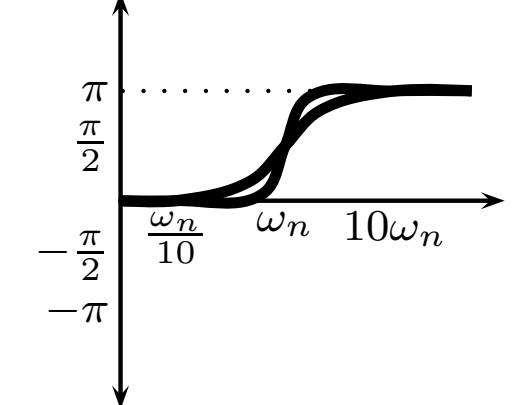
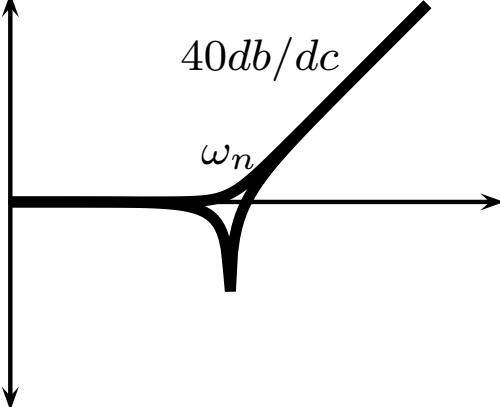
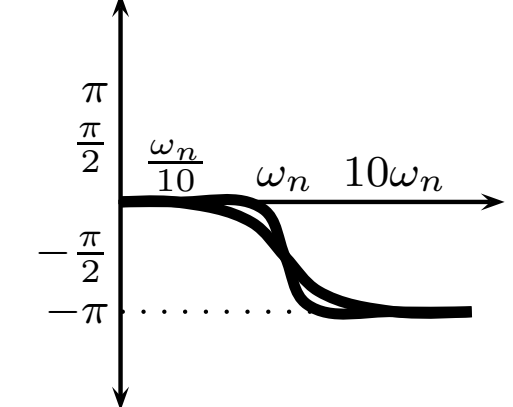
$F(s)$	$ F(j\omega) $	$\arg F(j\omega)$
$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ $\xi\omega_n > 0$		
$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ $\xi\omega_n < 0$		

Diagrama de Magnitud. 2º Orden

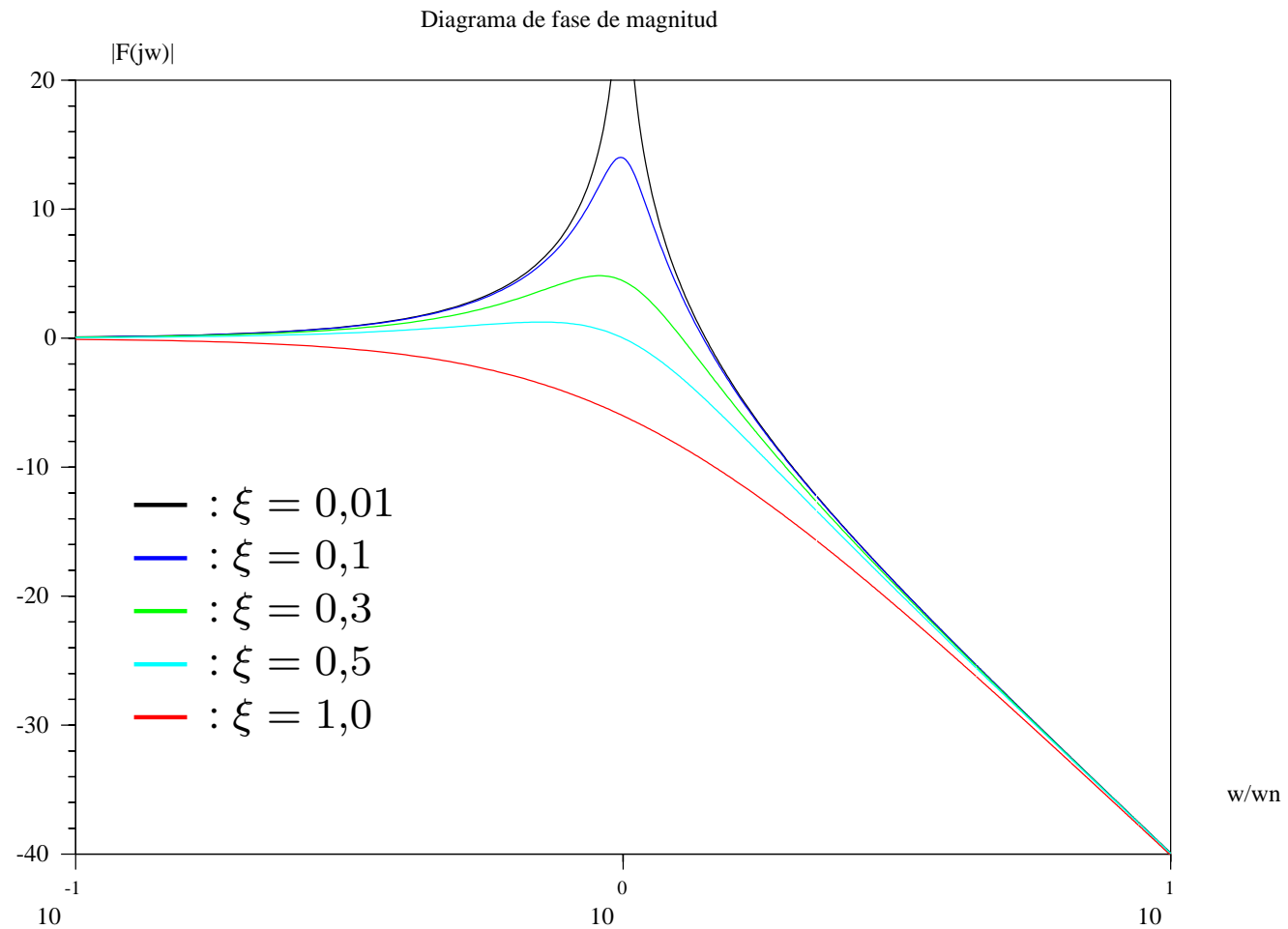
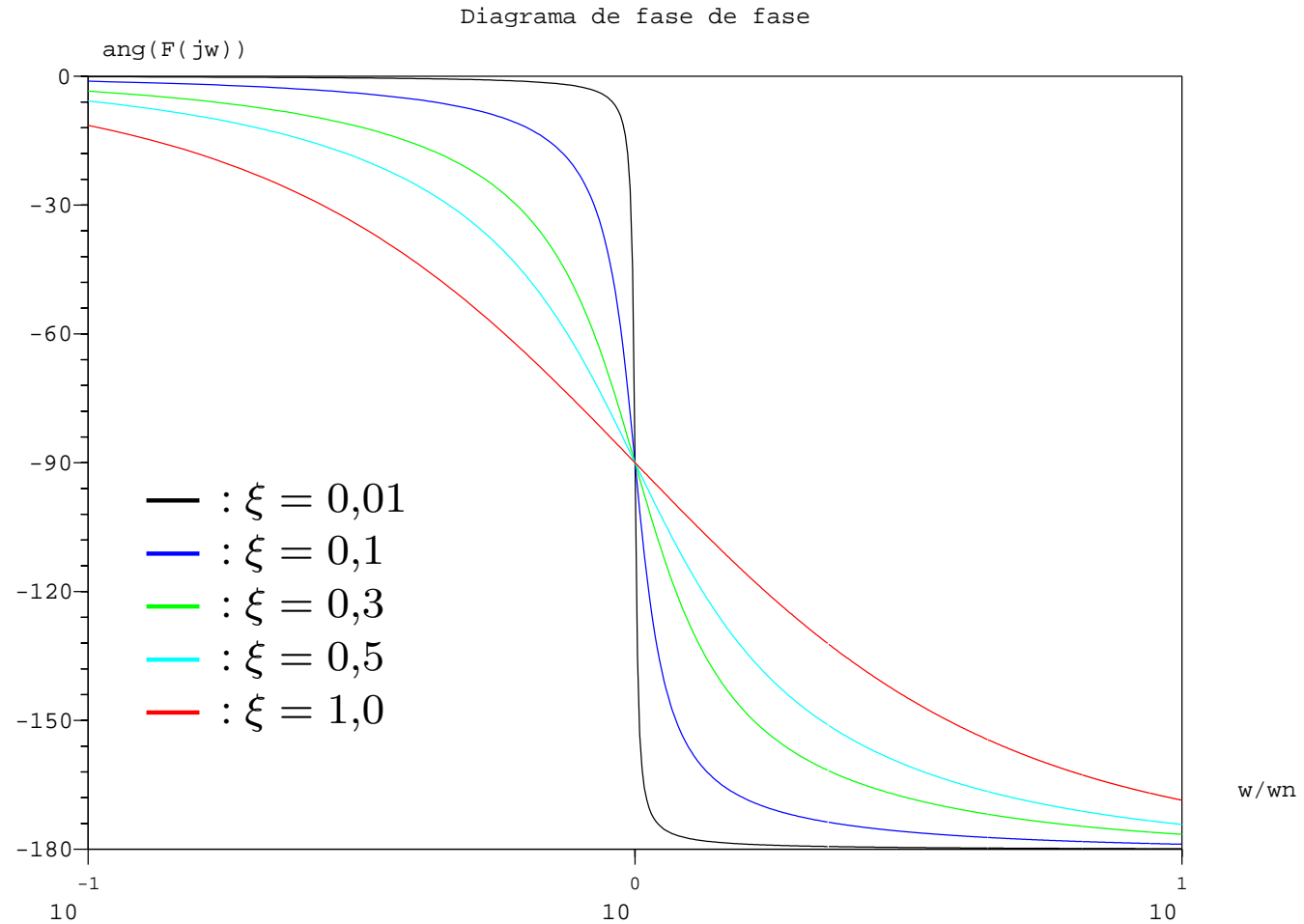


Diagrama de Fase. 2º Orden



Carta de Nichols

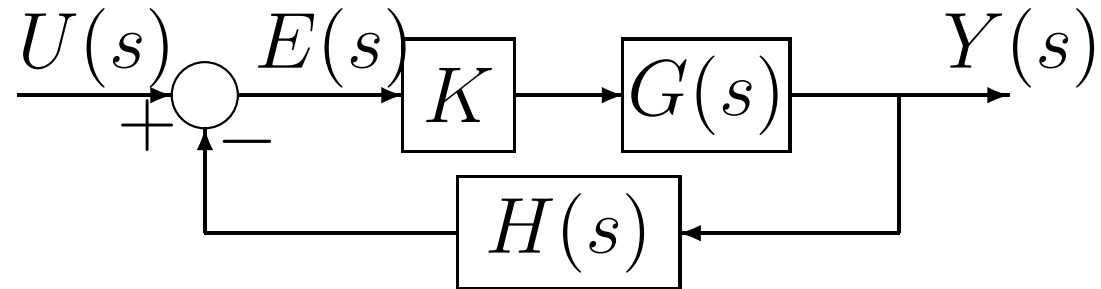


Figura 5: Sistema continuo retroalimentado simple

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Existe un método gráfico caído en desuso para calcular $F(j\omega)$ a partir de $G(j\omega)$ cuando $K = H(s) = 1$. Ese método se basa en las cartas de Nichols

Carta de Nichols

Supóngase $F(s)$, que corresponde a un sistema realimentado simple con realimentación unitaria,

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Al evaluar $F(s)$ en $s = j\omega$ la ecuación se convierte en

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

Carta de Nichols

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

Podemos calcular la magnitud y el ángulo de $F(j\omega)$, a partir de la parte real y la parte imaginaria de $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = X + jY$$

$$F(j\omega) = \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

Carta de Nichols

$$F(j\omega) = \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

La magnitud de $F(j\omega)$ será

$$M = |F(j\omega)| = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}}$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia, para M constante, conocida como la M-circunferencia

Carta de Nichols

$$F(j\omega) = \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

El ángulo de $F(j\omega)$ será

$$\alpha = \arg F(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Y}{(1 + X)} \right)$$

La tangente del ángulo de $F(j\omega)$ será

$$N = \tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Y}{(1 + X)} \right) \right)$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia, para N constante, conocida como la N-circunferencia

M-circunferencias

$$M = |F(j\omega)| = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}}$$

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2} = \frac{X^2 + Y^2}{1 + 2X + X^2 + Y^2}$$

$$M^2 + 2XM^2 + X^2M^2 + Y^2M^2 = X^2 + Y^2$$

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0$$

$$X^2 + \frac{2M^2}{(M^2 - 1)}X + \frac{M^2}{(M^2 - 1)} + Y^2 = 0$$

M-circunferencias

$$X^2 + \frac{2M^2}{(M^2 - 1)}X + \frac{M^2}{(M^2 - 1)} + Y^2 = 0$$

$$X^2 + \frac{2M^2}{(M^2 - 1)}X + \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} + Y^2 =$$

$$\frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} - \frac{M^2}{(M^2 - 1)} = \frac{M^4 - M^2(M^2 - 1)}{((M^2 - 1)^2)}$$

$$\left(X + \frac{M^2}{(M^2 - 1)} \right) + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} = \left(\frac{M}{(M^2 - 1)} \right)^2$$

M-circunferencias

$$\left(X + \frac{M^2}{(M^2 - 1)}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} = \left(\frac{M}{(M^2 - 1)}\right)^2$$

Esta ecuación corresponde a la de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{M^2}{(M^2-1)}, 0\right)$ y radio $\frac{M}{(M^2-1)}$.

Estas circunferencias se conocen como las *M-Circunferencias*.

N-circunferencias

$$N = \tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Y}{(1+X)} \right) \right)$$

Empleando la identidad trigonométrica

$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

obtenemos

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \frac{Y}{1+X}}$$

N-circunferencias

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \frac{Y}{1+X}}$$

$$N = \frac{\frac{Y+XY-XY}{X(1+X)}}{\frac{X+X^2+Y^2}{X(1+X)}} = \frac{Y + XY - XY}{X + X^2 + Y^2}$$

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{Y}{N} = 0$$

$$X^2 + X + \frac{1}{4} + Y^2 - \frac{Y}{N} + \left(\frac{Y}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{Y}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

N-circunferencias

$$X^2 + X + \frac{1}{4} + Y^2 - \frac{Y}{N} + \left(\frac{Y}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{Y}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

Esta ecuación corresponde a la de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right)$ y radio $\frac{1}{2N}\sqrt{N^2 + 1}$.

Estas circunferencias se conocen como las *N-Circunferencias*.

Carta de Nichols

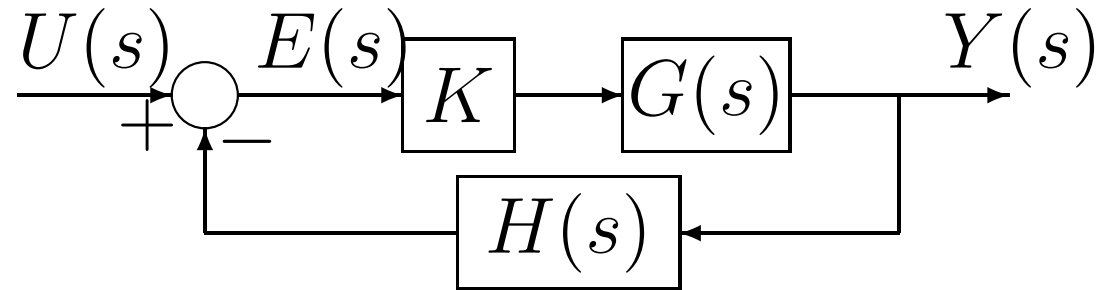
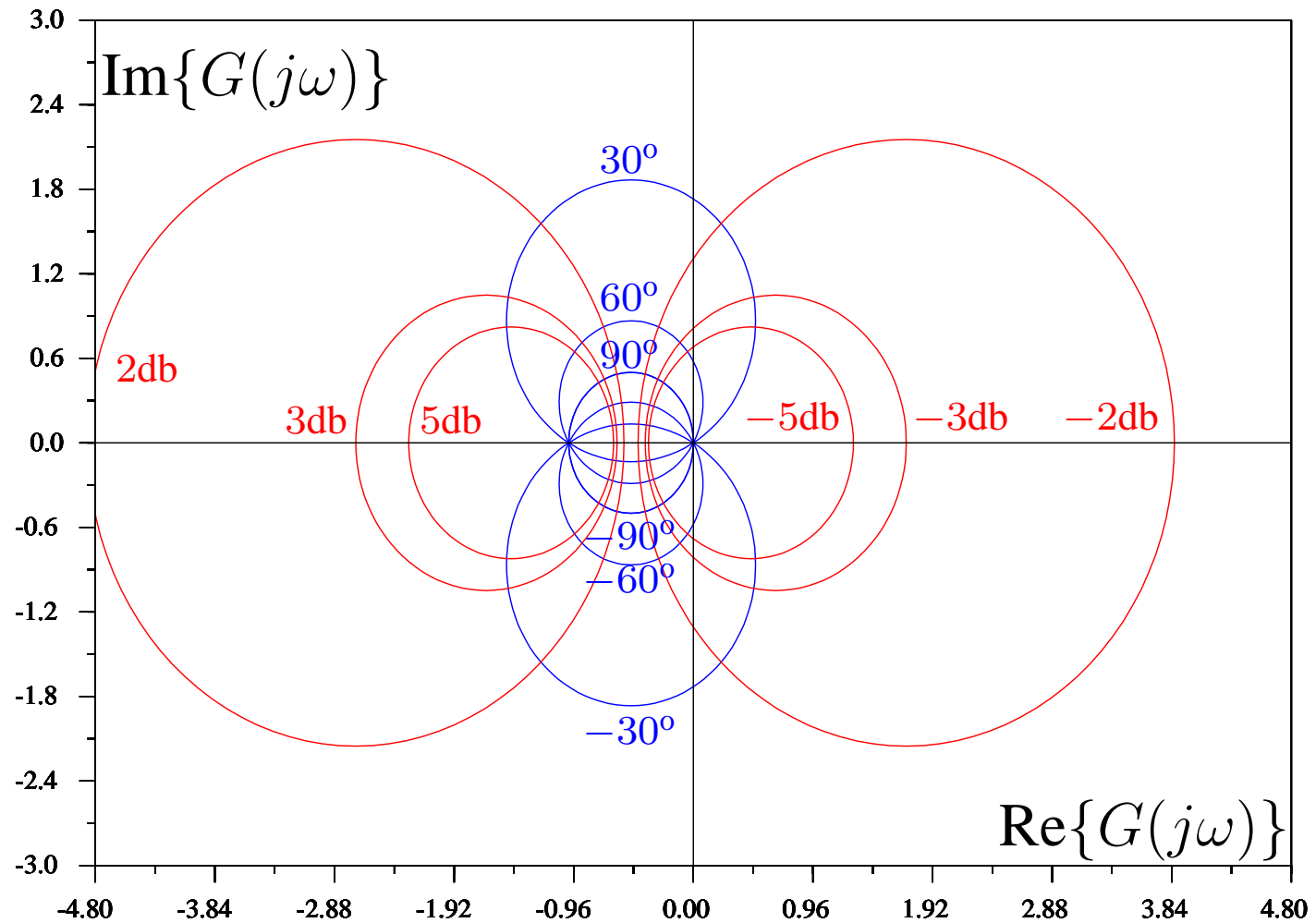


Figura 6: Sistema continuo retroalimentado simple

Si $H(s) = 1$ y $K = 1$, entonces en un plano que tenga por ejes X y Y , es decir la parte real y la parte imaginaria de $G(j\omega)$, el lugar geométrico de las magnitudes y ángulos de $F(j\omega)$ constantes son las M-circunferencias y N-circunferencias respectivamente.

Carta de Nichols rectangular



— $:|F(j\omega)|_{\text{en db}}$

— $:\arg\{F(j\omega)\}$

Carta de Nichols polar

