Representación en el Espacio de Estado

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Introducción

Estrategias para modelar el comportamiento de sistemas dinámicos:

- Ecuaciones diferenciales o de diferencia
- Funciones de Transferencia
- Respuestas al Impulso
- Diagramas de Bloque
- Diagramas de Flujo de Señal
- Espacio de Estado (variable de Estado)

Introducción

Ventajas de la Representacuión en Variables de Estado

- La representación de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas es más sencilla
- Toda la dinámica del sistema se representa por ecuaciones diferenciales o de diferencia de primer orden.
- Simulación con métodos computacionales más eficientes
- Nueva perspectiva sobre la dinámica de los sistemas
- Algunas de las técnicas de control moderno se basan en este tipo de representación.

Variables de Estado

Figura 1: Sistema Contínuo de múltiples entradas y múltiples salidas

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big)$$

Variables de Estado

Figura 2: Sistema Discreto de múltiples entradas y múltiples salidas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k\big) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k\big)
\end{aligned}
$$

Variables de Estado

- **u**: es un vector que contiene cada una de las p entradas al sistema
- **y**: es un vector que contiene cada una de las q salidas al sistema,
- **x**: es un vector que contiene cada una de las n variables de estado del sistema:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}_{p\times 1} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}_{q\times 1} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Variables de Estado

Para sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo, de múltiples entradas y múltiples salidas:

Caso contínuo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Caso discreto:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

Variables de Estado

El tamaño de las matrices debe ser el adecuado:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{n\times 1} &= \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} + \mathbf{B}_{n\times p}\mathbf{u}_{p\times 1}\\ \mathbf{y}_{q\times 1} &= \mathbf{C}_{q\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} + \mathbf{D}_{q\times p}\mathbf{u}_{p\times 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1)_{n\times 1} &= \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} + \mathbf{B}_{n\times p}\mathbf{u}_{p\times 1}\\ \mathbf{y}_{q\times 1} &= \mathbf{C}_{q\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} + \mathbf{D}_{q\times p}\mathbf{u}_{p\times 1}\end{aligned}$$

Variables de Estado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Algunos conceptos de Álgebra Lineal necesarios:

- Espacios Vectoriales
- Transformaciones Lineales
- Valores y Vectores Propios
- Forma canónica de Jordan
- Funciones de Matrices Cuadradas

Espacios Vectoriales

Sea un conjunto Γ y $\mathbf{F} : (\Phi, \oplus, \otimes)$ un campo (usualmente $\mathbf{F}$ se trata de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con las operaciones ususlaes de suma y multiplicación). A los elementos de Γ se les denomina *Vectores*, y a los elementos de Φ *Escalares*. Γ tiene estructura de *Espacio Vectorial sobre* $\mathbf{F}$ si está dotado de una operación binaria $+$ (suma vectorial) y una operación $\cdot$ entre elementos de Γ y Φ (Producto por escalar) que cumplen ciertas propiedades:

Espacios Vectoriales

$(\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$

Para la suma vectorial

[V.1] **Clausurativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x + y \in \Gamma$

Asociativa:

$\forall\, x, y, z \in \Gamma \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

Modulativa: $\exists\, 0 \in \Gamma \mid \forall x \in \Gamma \quad x + 0 = x$

Invertiva: $\forall\, x \in \Gamma \quad \exists\, (-x) \mid x + (-x) = 0$

Conmutativa: $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x + y = y + x$

Espacios Vectoriales

$(\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$

Para el producto por escalar

[V.1] **Clausurativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall\, \alpha \in \Phi \quad \alpha \cdot x \in \Gamma$ **Asociativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall\, \alpha, \beta \in \Phi \quad (\alpha \otimes \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ **Modulativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ 1 \cdot x = x$. 1 es el módulo de $\otimes$ **Anulativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ 0 \cdot x = \mathbf{0}$. 0 es el módulo de $\oplus$. $\mathbf{0}$ es el módulo de $+$

Espacios Vectoriales

$(\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$

Para las dos operaciones

[V.1] **Distributiva respecto a $+$:**

$\forall\ x, y \in \Gamma,\ \forall \alpha \in \Phi \quad \alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$

Distributiva respecto a $\oplus$:

$\forall\ x \in \Gamma,\ \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad (\alpha \oplus \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$

Espacios vectoriales

- $\mathbb{R}^n$ sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales.
- $\mathbb{C}^n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales.
- El conjunto de todos los polinomios sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales entre polinomio.
- El conjunto de todas las funciones contínuas a trozos sobre el campo $\mathbb{C}$ con la operación $+$ definida como la suma punto a punto.
- El conjunto de todas las matrices de tamaño fijo $m \times n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales entre matrices.

Espacios Vectoriales

Subespacio: Es un espacio vectorial contenido dentro de otro espacio vectorial, por ejemplo una recta dentro del plano

Combinación Lineal: Es una expresión de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

en donde los α son escalares y los x son vectores

Independencia Lineal: Un conjunto de vectores es lineamente independiente si la única combinación lineal de ellos cuyo resultado es 0 es la que tiene todos los coeficientes α iguales a 0.

Espacios Vectoriales

Conjunto generado: Es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores de un cierto conjunto, al que se denomina *conjunto generador*.

Dimension: Es el máximo número de vectores linealmente independientes que puede haber en un espacio vectorial.

Base: Es cualquier conjunto de vectores linealmente independiente que además genera el espacio vectorial. En $\mathbb{R}^2$ la base estándar está formada por los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$

Espacios Vectoriales

Coordenadas de un vector: Un vector x de un espacio vectorial puede escribirse como una única combinación lineal de su base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\}$:

$$x = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n$$

Los coeficientes α_i de esa combinación lineal son las coordenadas de x en la base B

Espacios Vectoriales

Cambios de Base: Un mismo vector tendrá diferentes coordenadas en dos bases diferentes. Sean dos bases del mismo espacio vectorial V de dimensión n:

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$$

Definimos las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como las matrices que tienen en sus columnas cada uno de los elementos de las bases A y B respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Espacios Vectoriales

Un vector x tendra coordenadas α_i en la base A y β_i en la base B, de tal manera que Definimos los vectores columna α y β que contienen las coordenadas:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Espacios Vectoriales

Las expresiones que permiten encontrar las coordenadas de x en una base a partir de sus coordenadas en la otra son las siguientes:

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\beta \qquad \alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\beta \qquad \beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\alpha$$

En caso de que A sea la base estándar, la matriz $\mathbf{A}$ resulta ser la matriz identidad de orden n y las ecuaciones se convierten en

$$\alpha = \mathbf{B}\beta \qquad \beta = \mathbf{B}^{-1}\alpha$$

Espacios Vectoriales

Transformaciones Lineales Dado un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión n, entenderemos por *Transformación Lineal*, en el contexto de este capítulo, una función de $\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}$ que puede representarse por una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times n$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Espacios Vectoriales

Transformaciones y Cambios de Base Sea T una transformación lineal, que en la base estándar se representa por la matriz $\mathbf{T}_\alpha$.
La misma transformación se representará en otra base $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ por

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B}$$

en donde $\mathbf{B} = [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n]$

Transformaciones Lineales

Ejemplo:

La función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ consistente en la rotación de vectores 90^{o} en sentido horario es una transformación lineal representada por la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Un vector $\mathbf{x}$ de coordenadas (a, b) se convertirá en un vector $\mathbf{y}$ cuyas coordenadas se calculan asi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

Cambio de Base

Ejemplo:
En $\mathbb{R}^2$ puede definirse una base con cualquier pareja de vectores no paralelos. Por ejemplo

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Cambio de Base

Consideremos ahora el vector x de la figura

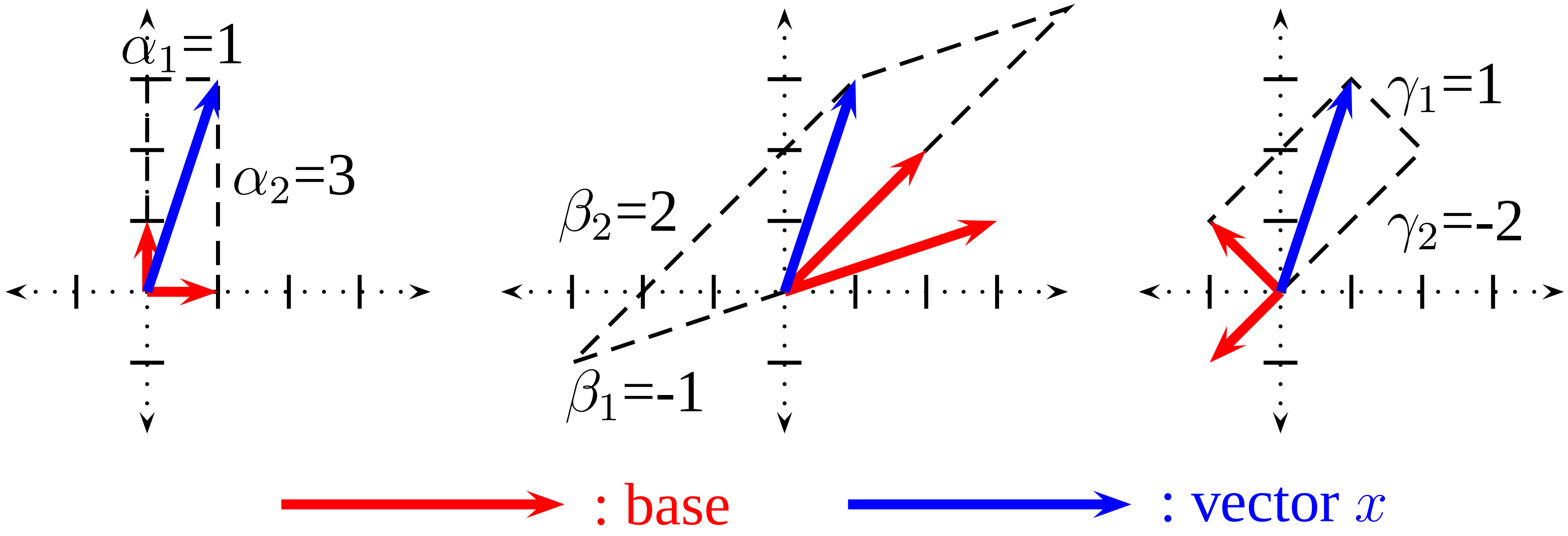

Figura 3: Cambio de base de un Vector

Cambio de Base

Las coordenadas de x en la base estándar A serán

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener las coordenadas de x en las bases B y C construimos las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y empleamos la ecuación de Cambio de Base

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\alpha = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Cambio de Base

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\alpha = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que las coordenadas en las bases B y C satisfacen las relaciones de Cambio de Base

$$\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\gamma \qquad \gamma = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\beta$$

Transformaciones Lineales y Cambio de Base

Ejemplo:
La rotación de 90° en sentido horario està representada en la base estándar por la matriz

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La misma transformación se representará en la base $B = \{(3,1),(2,2)\}$ por la matriz

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B}$$

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2{,}5 & -2 \end{bmatrix}$$

Transformaciones Lineales y Cambio de Base

Supóngase ahora el vector $\mathbf{x}$, cuyas coordenadas en la base estándar son $\alpha_x = (1,3)$ y en la base B son $\beta_x = (-1,2)$.
Al efectuar la rotación de 90^{o} en sentido horario se obtendrá un vector $\mathbf{y}$ cuyas coordenadas en la base estándar serán α_y y en la base B serán β_y:

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2{,}5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Un escalar λ es un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Cualquier vector no nulo $\mathbf{v}$ que satizfaga $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ es un *vector propio* asociado con el valor propio λ.

Valores y Vectores Propios

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

- Para un vector propio $\mathbf{v}$ el efecto de aplicarle la transformación lineal $\mathbf{A}$ que amplificarlo por el escalar λ. Esto implica que un vector y el vector transformado son colineales o paralelos y por lo tanto linealmente dependientes.
- Esta definición se refiere estrictamente a *valores y vectores propios por derecha*, para distinguirlos de los *valores y vectores propios por izquierda*, que deben satisfacer $\mathbf{v}^{\mathrm{t}}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{v}^{\mathrm{t}}$. En este texto sólo se consideran los primeros, y por tanto se hace referencia a ellos simplemente como *valores y vectores propios*.

Valores y Vectores Propios

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Para calcular los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ puede reescribirse la ecuación como

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

En donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de igual orden que $\mathbf{A}$, es decir $n \times n$. Para que exista una vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $(\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ debe cumplirse que

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Valores y Vectores Propios

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

El lado izquierdo de la ecuación corresponde a un polinomio de orden n en la variable λ, conocido como el *polinomio característico* de $\mathbf{A}$, y denotado por $\Delta(\lambda)$.

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son las raices de su polinomio característico $\Delta(\lambda)$. Por tanto, existen la matriz $\mathbf{A}$ tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; estos valores podrán ser reales o complejos y podrán ser diferentes o repetidos.

Valores y Vectores Propios

Ejemplo:
Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\lambda - 4) & -1 \\ 2 & (\lambda - 1) \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\lambda - 4) & -1 \\ 2 & (\lambda - 1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) =$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raices de $\Delta(\lambda)$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$$

Valores y Vectores Propios

Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$ deben cumplir $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$:

$$\mathbf{Av}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4v_{11} + v_{21} \\ -2v_{11} + v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{11} \\ 2v_{21} \end{bmatrix}$$

Se crea entonces un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 4v_{11} + v_{21} & = 2v_{11} \\ -2v_{11} + v_{21} & = 2v_{21} \end{cases}$$

Valores y Vectores Propios

$$\begin{cases} 4v_{11} + v_{21} & = 2v_{11} \\ -2v_{11} + v_{21} & = 2v_{21} \end{cases}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ podemos escoger arbitrariamente un valor para v_{11} o para v_{21}. Por ejemplo, si escogemos $v_{11} = 1$ obtenemos $v_{21} = -2$. En consecuencia, un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ será

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$ también deben cumplir $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$:

$$\mathbf{Av}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4v_{12} + v_{22} \\ -2v_{12} + v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_{12} \\ 3v_{22} \end{bmatrix}$$

Se crea entonces un segundo sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 4v_{12} + v_{22} & = 3v_{12} \\ -2v_{12} + v_{22} & = 3v_{22} \end{cases}$$

Valores y Vectores Propios

$$\begin{cases} 4v_{12} + v_{22} & = 3v_{12} \\ -2v_{12} + v_{22} & = 3v_{22} \end{cases}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ podemos escoger arbitrariamente un valor para v_{12} o para v_{22}. Por ejemplo, si escogemos $v_{12} = 1$ obtenemos $v_{22} = -1$. En consecuencia, un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ será

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

Ejemplo:
Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ 1 & (\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ 1 & (\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 2)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raices de $\Delta(\mathbf{A})$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm j$$

Valores y Vectores Propios

Al aplicar $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para λ_1 y λ_2 se obtienen dos sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones

$$\begin{cases} 2v_{11} + v_{21} & = (2+j)v_{11} \\ -v_{11} + 2v_{21} & = (2+j)v_{21} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_{12} + v_{22} & = (2-j)v_{12} \\ -v_{12} + 2v_{22} & = (2-j)v_{22} \end{cases}$$

Seleccionando arbitrariamente $v_{11} = 1$ y $v_{12} = 1$ se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

o en general

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ ja \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -ja \end{bmatrix}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios diferentes

- Sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden $n \times n$
- Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ los n valores propios de $\mathbf{A}$, *Todos diferentes*
- $\mathbf{v}_i$ un vector caracterísitico asociado a λ_i con $i = 1, 2, \cdots, n$

El conjunto $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto sirve como una base para el espacio vectorial.
Si se efectua un cambio de base a la nueva base V, la matriz $\mathbf{A}$ se transforma en la matriz $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios diferentes

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

La matriz **Lambda** es la *matriz diagonalizada*, o la *Forma canónica de Jordan* de **A**, y se define define asi:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La matriz **M** se denomina la *Matriz Modal*, y se define asi:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios diferentes

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

<u>Demostración:</u> Comprobamos que $\mathbf{M\Lambda} = \mathbf{AM}$:

$$\mathbf{M\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AM} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ entonces $\mathbf{M\Lambda} = \mathbf{AM}$

Ejemplo

La transformación lineal representada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ con vectores propios $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ Tiene una representación en la base $\{\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2\}$ dada por la matriz diagonal

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

La transformación lineal representada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_{1,2} = 2 \pm j$ con vectores propios $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ tiene una representación en la base $\{\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2\}$ dada por la matriz diagonal

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} j/2 & -j/2 \\ j/2 & j/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2+j & 0 \\ 0 & 2-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{M}^{-1}\mathbf{A}\mathrm{M}$$

En general, los vectores propios obtenidos no necesariamente serán linealmente independientes, por lo tanto, la matriz modal M tendrá columnas que son linealmente dependientes y su determinante será 0; como consecuencia no será posible obtener M^{-1} y no se podrá calcular $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{M}^{-1}\mathbf{A}\mathrm{M}$. No obstante, en ocasiones si es posible diagonalizar una matriz con valores propios repetidos, y siempre es posible *diagonalizarla por bloques*

Degeneracidad

Dada una transformación lineal $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$, de valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, se define la *degeneracidad* del valor propio λ_i, denotada por d_i, como el número de vectores propios de linealmente independientes asociados a un valor propio λ_i, y se calcula asi:

$$d_i = n - \rho(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

en donde $\rho(\mathbf{X})$ es el *rango* de la matriz $\mathbf{X}$, que equivale al número de columnas (o filas) linealmente independientes de $\mathbf{X}$

Ejemplo

Obtener los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A} =$ y diagonalizarla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ 2 & (\lambda - 5) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^2$$

Ejemplo

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raices de $\Delta(\lambda)$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$$

La degeneracidad de $\lambda = 3$ se obtiene asi:

$$d_1 = 2 - \rho(3\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$d_1 = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix}\right) = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$d_1 = 2 - 1 = 1$$

Ejemplo

Lo anterior significa que aunque λ tiene multiplicidad 2, sólo es posible encontrar un vector linealmente independiente que resulta ser

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

No es posible construir una base para el espacio de dimensión 2 con un sólo vector, por lo tanto no es posible diagonalizar $\mathbf{A}$

Ejemplo

Obtener los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A} =$ y diagonalizarla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Construimos $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 3) & 0 & 1 \\ -1 & (\lambda - 2) & 1 \\ 1 & 0 & (\lambda - 3) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16$$

Ejemplo

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-2)-(\lambda-2) = \lambda^3-8\lambda^2+20\lambda-16$$

Las raices del polinomio son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$. Para determinar la degeneracidad de λ_1 calculamos $\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (2-3) & 0 & 1 \\ -1 & (2-2) & 1 \\ 1 & 0 & (2-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = n - \rho(\lambda\mathbf{I} - \lambda A) \qquad d_1 = 3 - 1 = 2$$

Existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Ejemplo

Los dos vectores propios asociados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ junto con el vector propio asociado a $\lambda_3 = 4$ pueden formar una base y por tanto es posible diagonalizar $\mathbf{A}$. Para obtener los tres vectores propios empleamos $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Se originan los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3a - c = 2a \\ a + 2b - c = 2b \\ -a + 3c = 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3d - f = 4a \\ d + 2e - f = 4e \\ -d + 3f = 4f \end{cases}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} 3a - c = 2a \\ a + 2b - c = 2b \\ -a + 3c = 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3d - f = 4a \\ d + 2e - f = 4e \\ -d + 3f = 4f \end{cases}$$

Se convierten en

$$a = c \qquad d = e = -f$$

Podemos construir dos vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ que satisfacen $a = c$ y un tercero $\mathbf{v}_3$ que satisface $d = e = -f$, por ejemplo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

En la base $\{\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3\}$ la transformación $\mathbf{A}$ se representa por $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

Cuando no se puede encontrar un conjunto de vectores propios linealmente independiente lo suficientemente grande para diagonalizar la matriz, debe acudirse al concepto de *vectores propios generalizados* para lograr una *diagonalización por bloques*. El concepto de vector propio generalizado, y la forma de calcularlos se sale del ámbito de este curso. No obstante, es posible determinar en forma sencilla cuál es la forma de la matriz diagonalizada por bloques, o *Forma Canónica de Jordan* de una matriz.

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

$\mathbf{J}$ es la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

Cada bloque de Jordan está asociado a un valor propio de la matriz $\mathbf{A}$. Para conocer la forma exacta de la matriz $\mathbf{J}$ es necesario responder estas preguntas:

- ¿Cuántos bloques tiene asociados cada valor propio no repetido de la matriz $\mathbf{A}$?
- ¿De qué tamaño es cada uno de los bloques de Jordan asociados a cada valor propio no repetido de la matriz $\mathbf{A}$?

Existe un algoritmo para contestar estas preguntas

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

Algoritmo: Se plantea para un valor propio λ, y deberá aplicarse para cada valor propio diferente:

1. Se define la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$
2. Se calcula $\rho(\mathbf{B}^0), \rho(\mathbf{B}^1), \rho(\mathbf{B}^2), \cdots, \rho(\mathbf{B})^r$ hasta que no haya cambio al incrementar el exponente
3. Se calculan las *nulidades* $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$, en donde $\nu_i = n - \rho(\mathbf{B}^i)$
4. Se calcula $\hat{\nu}_i = \nu_i - \nu_i - 1$, para $i = 1, 2, \cdots, r$.

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

5. Se construye el *diagrama de Matthew* con la forma que se presenta en la figura: el número de celdas de cada fila del diagrama de Matthew está determinado por $\hat{\nu}_i$

$\hat{\nu}_r$	$\times$	$\times$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$\hat{\nu}_2$	$\times$	$\cdots$	$\times$	
$\hat{\nu}_1$	$\times$	$\cdots$	$\times$	$\times$

Figura 4: Diagrama de Matthew vacio simple

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

6. Utilizar las siguientes convenciones:
   a) Identificar el número de columnas del diagrama como q
   b) Identificar las columnas del diagrama como $c_1, c_2, \cdots, c_q$ de izquierda a derecha
   c) Identificar el tamaño de cada columna como $h_1, h_2, \cdots, h_q$
7. En esas condiciones el número de bloques de Jordan asociados al valor propio λ es q, y el tamaño de cada uno de esos bloques es $h_1, h_2, \cdots, h_q$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

Un general, la forma canónica de Jordan será entonces:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{12} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{1q_1} \end{matrix} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \begin{matrix} \mathbf{J}_{m1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{mq_m} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Forma Canónica de Jordan
Valores propios repetidos

$$
\mathbf{J}_{ji} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}}
$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los valores propios de $\mathbf{A}$ hacemos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = [(3-\lambda)(1-\lambda)+1](\lambda-2)^2[(1-\lambda)^2-1]$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda - 2)^5 \lambda = 0$$

Ejemplo

$$\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=(\lambda-2)^5\lambda=0$$

Es decir, $\mathbf{A}$ tiene un valor propio 2 de multiplicidad 5 y un valor propio 0 de multiplicidad 1. Nos proponemos encontrar el diagrama de Matthew de los vectores propios asociados a $\lambda_1=2$.
Para ello definimos $\mathbf{B}=\left(\mathbf{A}-2\mathbf{I}\right)$ y calculamos $\mathbf{B}^0,\mathbf{B}^1\mathbf{B}^2,\mathbf{B}^3,\cdots$, sus rangos y nulidades

$$\mathbf{B}^0=\mathbf{I}\qquad \rho(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^0=6\qquad \nu_0=6-6=0$$

Ejemplo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 4$$

$$\nu_1 = 6 - 4 = 2$$

Ejemplo

$$\mathbf{B^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = 2$$

$$\nu_2 = 6 - 2 = 4$$

Ejemplo

$$\mathbf{B^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = 1$$

$$\nu_3 = 6 - 1 = 5$$

Dado que $\nu_3 = 1$ no es necesario continuar, pues $\nu_4 = \nu_3$.

Ejemplo

Con la información anterior podemos calcular $\hat{\nu}_i$:

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}_3 &= \nu_3 - \nu_2 &= 5 - 4 = \;& 1 \\
\hat{\nu}_2 &= \nu_2 - \nu_1 &= 4 - 2 = \;& 2 \\
\hat{\nu}_1 &= \nu_1 - \nu_0 &= 2 - 0 = \;& 2
\end{aligned}$$

El diagrama de Matthew resulta ser

$\times$	
$\times$	$\times$
$\times$	$\times$

De donde se deduce que $q = 2$, $h_1 = 3$ y $h_2 = 2$

Ejemplo

$q = 2$, $h_1 = 3$ y $h_2 = 2$.
La forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$ será

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma canónica de Jordan
Valores propios complejos

Cuando existen valores propios complejo es posible efectuar otro cambio de coordenadas diferente que produce también una matriz diagonal por bloques, pero real, conocida como la *Forma canónica Real de Jordan*.

La nueva matriz modal $\mathbf{M}_R$ remplaza cada pareja de vectores propios complejos conjugados por dos vectores reales, uno con la parte real y otro con la parte imaginaria de los vectores remplazados.

Para un valor propio complejo $\lambda = a \pm jb$ que no se repite, el bloque de Jordan asociado tendrá la forma

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea la matriz **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de **A** son

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3} = -0{,}5 \pm j0{,}866$$

Ejemplo

La Forma Canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ y la matriz modal que la producen son:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 + j0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 - j0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0{,}408 & (-0{,}015 - j0{,}408) & (-0{,}015 + j0{,}408) \\ 0{,}816 & (0{,}721 + j0{,}382) & (0{,}721 - j0{,}382) \\ 0{,}408 & (0{,}346 - j0{,}217) & (0{,}346 + j0{,}217) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Para obtener la Forma Canónica Real de Jordan de $\mathbf{A}$ construimos la matriz real $\mathbf{M}_R$, y verificamos.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} -0{,}408 & -0{,}015 & -0{,}408 \\ 0{,}816 & 0{,}721 & 0{,}382 \\ 0{,}408 & 0{,}346 & -0{,}217 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_R = \mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}866 \\ 0 & -0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Funciones de Matrices Cuadradas

Sea $f(\lambda)$ una función que opera sobre un escalar, y sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada $n \times n$.

¿cómo calcular $f(\mathbf{A})$?

Es decir, ¿como extender $f(\lambda)$ de los escalares a las matrices?.
Si $f(\lambda)$ es un polinomio, la extensión a las matrices se fundamenta en la definición

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k \text{ veces}} \qquad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$$

Funciones de Matrices Cuadradas

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene una representación canónica de Jordan $\mathbf{J}$ obtenida con la matriz modal $\mathbf{M}$, es decir, si $\mathbf{A} = \mathbf{MJM}^{-1}$ entonces

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{(\mathbf{MJM}^{-1})(\mathbf{MJM}^{-1})\cdots(\mathbf{MJM}^{-1})}_{k \text{ veces}}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M} \underbrace{(\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})}_{k \text{ veces}} \mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{MJ}^k\mathbf{M}^{-1}$$

Funciones de Matrices Cuadradas

Como $\mathbf{J}$ es un a matriz diagonal por bloques, el cálculo de $\mathbf{J}^k$ puede efectuarse como sigue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2^k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_n^k \end{bmatrix}$$

Funciones de Matrices Cuadradas

Un polinomio genérico

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$$

puede calcularse en **A** como

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_n\mathbf{A}^n$$

o en función de las matrices **M** y **J**:

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} + a_1\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} + \cdots + a_n\mathbf{M}\mathbf{J}^n\mathbf{M}$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}f(\mathbf{J})\mathbf{M}^{-1}$$

Ejemplo

Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan para el caso en que los valores propios son imaginarios puros

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos los primeros términos $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \cdots$:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} -b^6 & 0 \\ 0 & -b^6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Observando la secuencia se puede inferir que

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{k}{2}} b^k & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{k}{2}} b^k \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ es par} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{k-1}{2}} b^k \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} b^k & 0 \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Funciones de Matrices Cuadradas

También es posible extender una función $f(\sigma)$ que no sea un polinomio de los escalares a las matrices empleando la representación de $f(\sigma)$ en series de Taylor expandidas alrededor de 0 (series de MacLaurin):

$$f(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k!} \left. \frac{d^k f(\sigma)}{d\sigma^k} \right|_{\sigma}$$

De esta forma se puede expresar $f(\sigma)$ como un polinomio de σ. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, puede calcularse $f(\mathbf{A})$ empleando ese polinomio.

Funciones de Matrices Cuadradas

Algunas expansiones de funciones comunes:

$$e^{\sigma t} = 1 + \frac{\sigma t}{1!} + \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \frac{\sigma^3 t^k}{3!} + \frac{\sigma^4 t^k}{4!} + \cdots$$

$$\cos at = 1 - \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^4 t^4}{4!} - \frac{a^6 t^6}{6!} + \frac{a^8 t^8}{8!} + \cdots$$

$$\sin at = \frac{at}{1!} - \frac{a^3 t^3}{3!} + \frac{a^5 t^5}{5!} - \frac{a^7 t^7}{7!} + \cdots$$

Ejemplo

Sea **A** una matriz diagonal. Calcular $e^{\mathbf{A}t}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^k}{4!} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

Ejemplo

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} g_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n(t) \end{bmatrix}$$

$$g_i(t) = (1 + \frac{\lambda_i t}{1!} + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_i^3 t^3}{3!} + \cdots)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan para el caso en que los valores propios son imaginarios puros.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^k}{4!} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} + \cdots$$

Ejemplo

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{t^2b^2}{2!} + \frac{t^4b^4}{2!} + \cdots) & (\frac{tb}{1!} - \frac{t^3b^3}{3!} + \frac{t^5b^5}{5!} + \cdots) \\ (-\frac{tb}{1!} + \frac{t^3b^3}{3!} - \frac{t^5b^5}{5!} + \cdots) & (1 - \frac{t^2b^2}{2!} + \frac{t^4b^4}{2!} + \cdots) \end{bmatrix}$$

Cada uno de los términos de la matriz corresponde a la expansión de Taylor de una sinusoide , por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ puede calcularse como

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Para calcular $e^{mathbf{A}t}$ escribimos $\mathbf{A}$ como la suma de dos matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

De tal manera que $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{C}t}$.

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix}$$