Sistemas Realimentados Simples
Estabilidad de Sistemas Contínuos

Diagrama y Criterio de Nyquist

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Sistema Contínuo

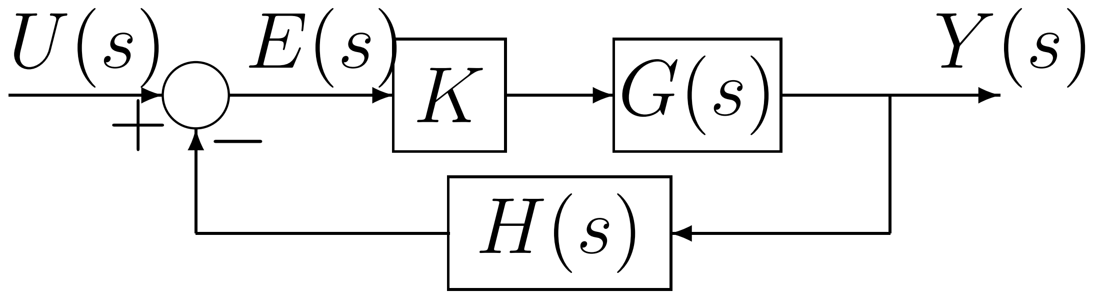


Figura 1: Sistema contínuo retroalimentado simple

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

¿$F(s)$ es estable?, es decir, ¿sus polos están en el semi-plano izquierdo?

Evaluación gráfica de $F(s)$

Sea $F(s)$ una función racional compleja:

$$F(s) = \frac{a_0 + a_1 s^1 + \cdots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s^1 + \cdots + b_n s^n}$$

Al factorizar los polinomios, la ecuación podrá escribirse como

$$F(s) = G\frac{(s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

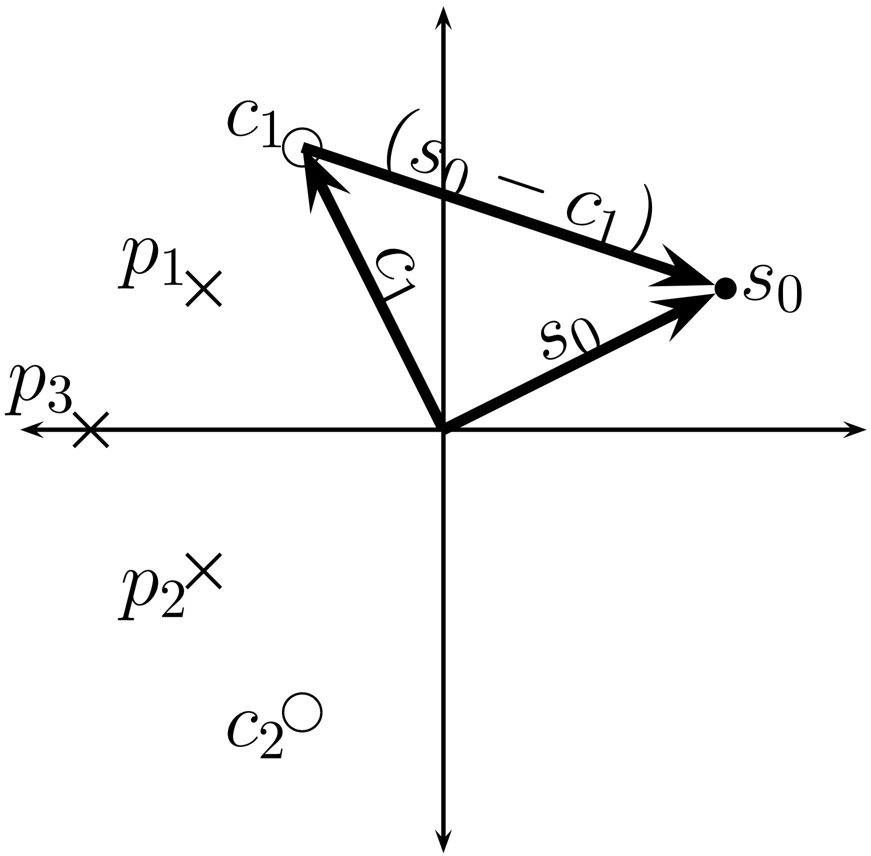
Para calcular $F(s_0)$, se remplaza s por s_0:

$$F(s_0) = G\frac{(s_0-c_1)(s_0-c_2)\cdots(s_0-c_m)}{(s_0-p_1)(s_0-p_2)\cdots(s_0-p_n)}$$

Evaluación gráfica de $F(s)$

$$F(s_0) = G\frac{(s_0 - c_1)(s_0 - c_2)\cdots(s_0 - c_m)}{(s_0 - p_1)(s_0 - p_2)\cdots(s_0 - p_n)}$$

Cada paréntesis puede determinarse de forma gráfica



Evaluación gráfica de $F(s)$

$$F(s_0) = G\frac{(s_0 - c_1)(s_0 - c_2)\cdots(s_0 - c_m)}{(s_0 - p_1)(s_0 - p_2)\cdots(s_0 - p_n)}$$

$$|F(s_0)| = G\frac{\prod^m \text{Magnitudes de los vectores que van de ceros a } s_0}{\prod^n \text{Magnitudes de los vectores que van de polos a } s_0}$$

$$\arg F(s_0) = \begin{array}{l} \sum^m \text{Ángulos de los vectores que van de ceros a } s_0 \\ -\sum^n \text{Ángulos de los vectores que van de polos a } s_0 \end{array}$$

Principio del argumento

Sea $F(s) = s + 1$. Un único cero en $s = -1$ y no tiene polos. Se desea calcular $F(s_0)$, para $s_0 = 1 + j$

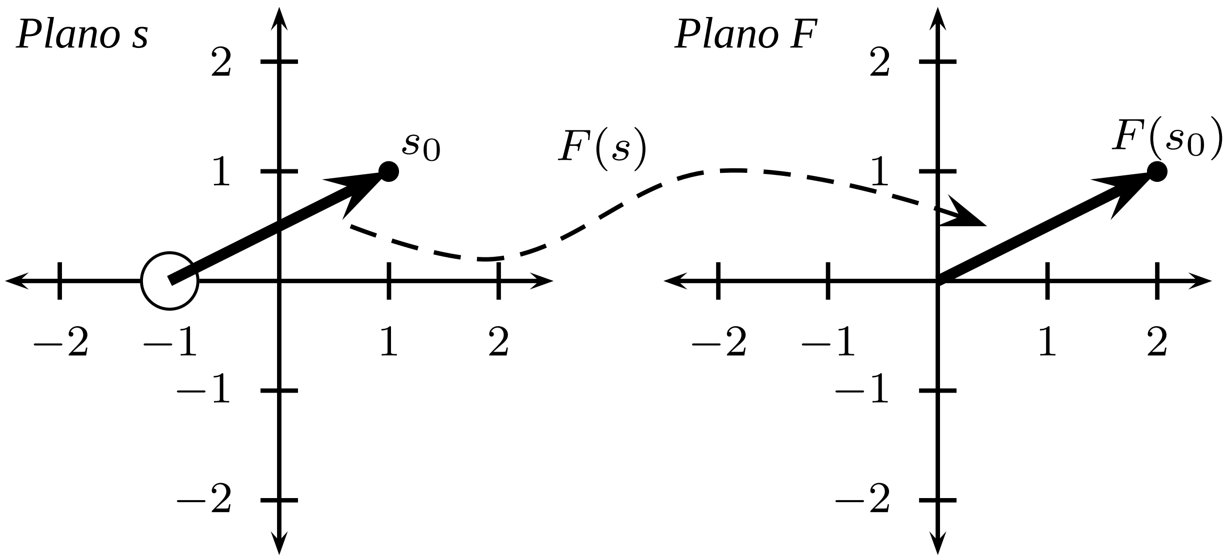


Figura 3: Plano *s* y Plano *F*

Principio del argumento

Sea $F(s) = s + 1$. Una trayectoria en sentido horario

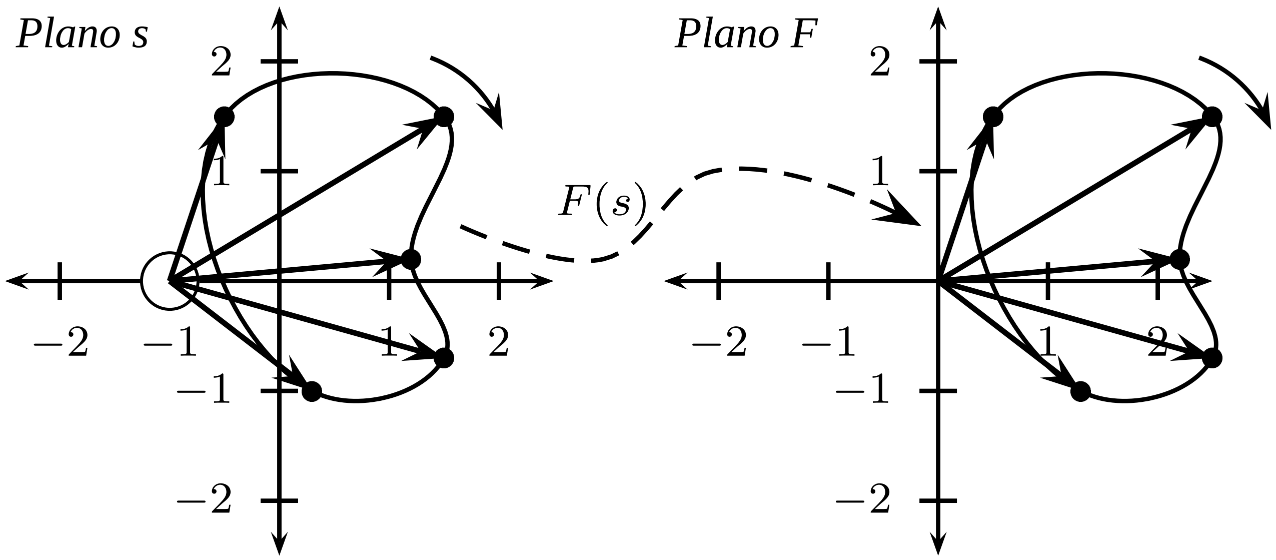


Figura 4: Plano *s* y Plano *F* en una trayectoria cerrada que no encierra el cero

$F(s)$ No encierra al punto $(0, 0)$

Principio del argumento

Sea $F(s) = s + 1$. Una trayectoria en sentido horario

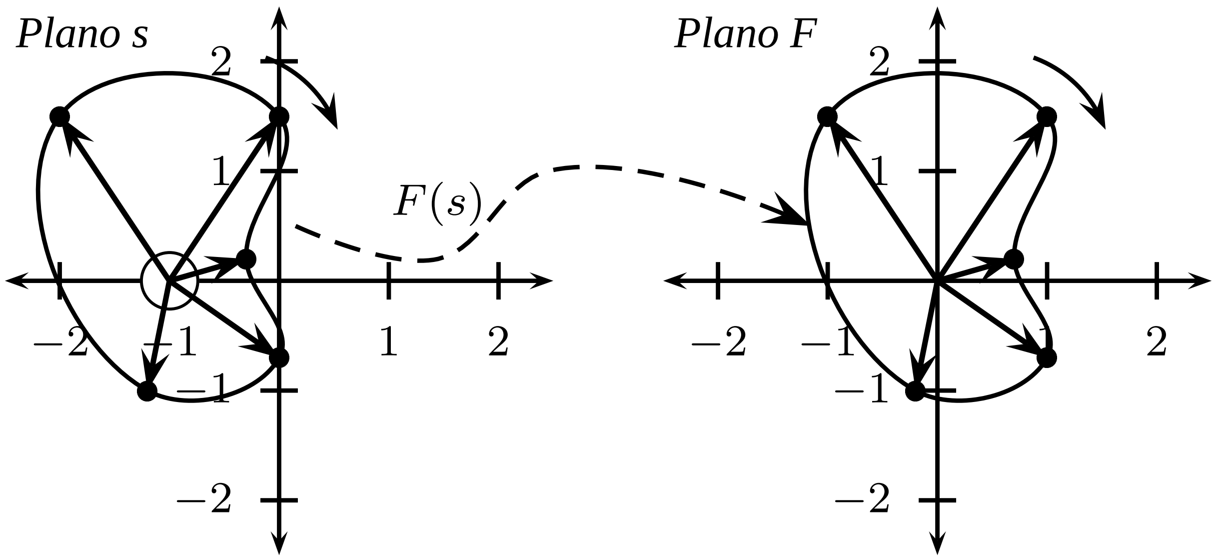


Figura 5: Plano *s* y Plano *F* en una trayectoria cerrada que encierra el cero

$F(s)$ Si encierra al punto $(0, 0)$

Principio del argumento

Sea $F(s) = \frac{1}{s+1}$. Una trayectoria en sentido horario

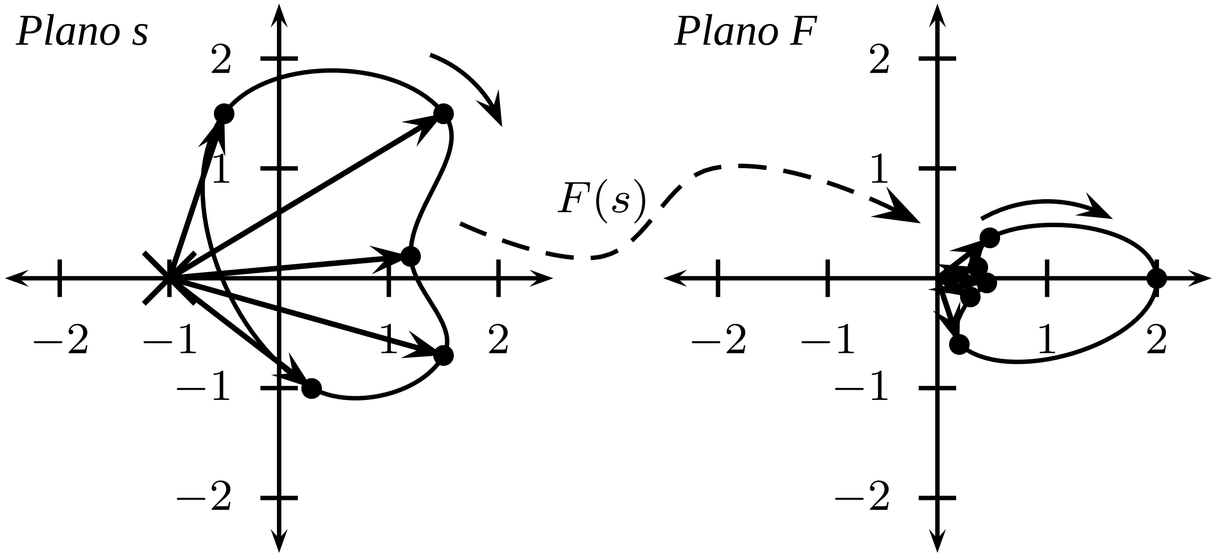


Figura 6: Plano *s* y Plano *F* en una trayectoria cerrada que no encierra el polo

$F(s)$ No encierra al punto $(0,0)$

Principio del argumento

Sea $F(s) = \frac{1}{s+1}$. Una trayectoria en sentido horario

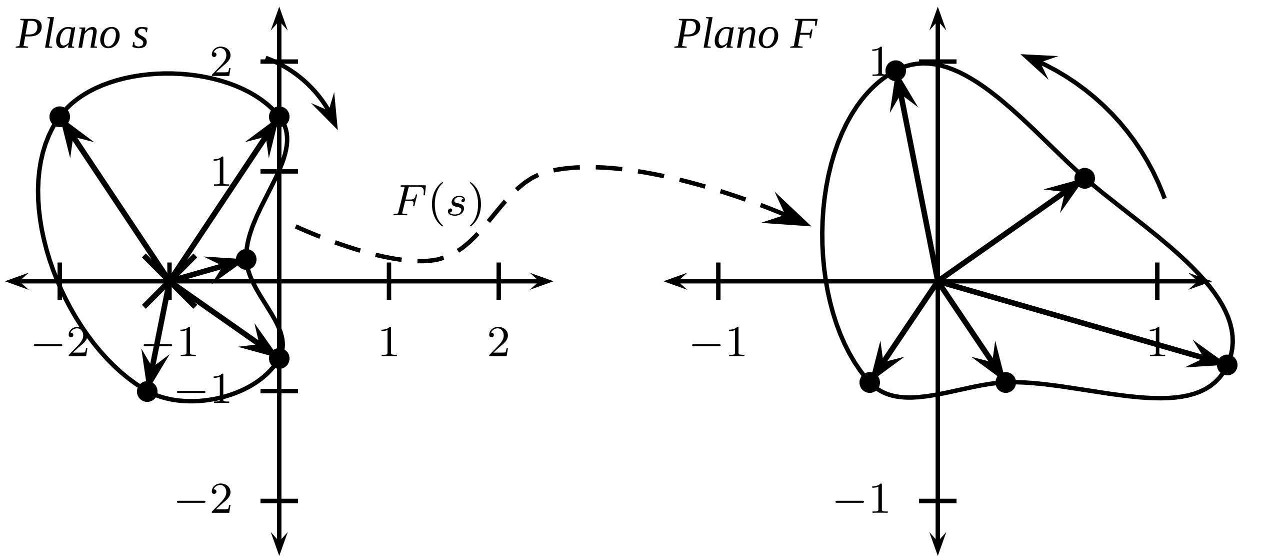


Figura 7: Plano *s* y Plano *F* en una trayectoria cerrada que encierra el polo

$F(s)$ Si encierra al punto $(0, 0)$. Cambio de sentido

Principio del argumento

Si la trayectoria hubiese encerrado varios ceros y varios polos, cada uno de estos ceros habría contribuido en $F(s)$ con un término que habría variado 360^{o} en sentido horario, mientras que cada polo lo haría con otro término que habría variado 360^{o} en sentido antihorario. Otro detalle a tener en cuenta, es que si la trayectoria contiene un polo de $F(s)$, al calcuarla en ese punto el resutado será ∞, y por lo tanto la trayectoria generada en el plano F no necesariamente será cerrada. Estos hechos pueden consignarse en el *principio del argumento*.

Principio del argumento

Dada una función $F(s)$, calculada en una trayectoria cerrada Γ, que no contene ningún polo de $F(s)$, recorrida en sentido horario, el resultado es también una trayectoria cerrada que encierra al origen en sentido horario un número de veces

$$\alpha = n_\Gamma - m_\Gamma$$

$n_\Gamma =$ Número de ceros de F(s) encerrados por Γ

$m_\Gamma =$ Número de polos de F(s) encerrados por Γ

Trayectoria de Nyquist

La trayectoria de Nyquist para un sistema contínuo realimentado es una curva cerrada Γ que abarca todo el semiplano derecho, y que no contiene ningún polo de $G(s)H(s)$

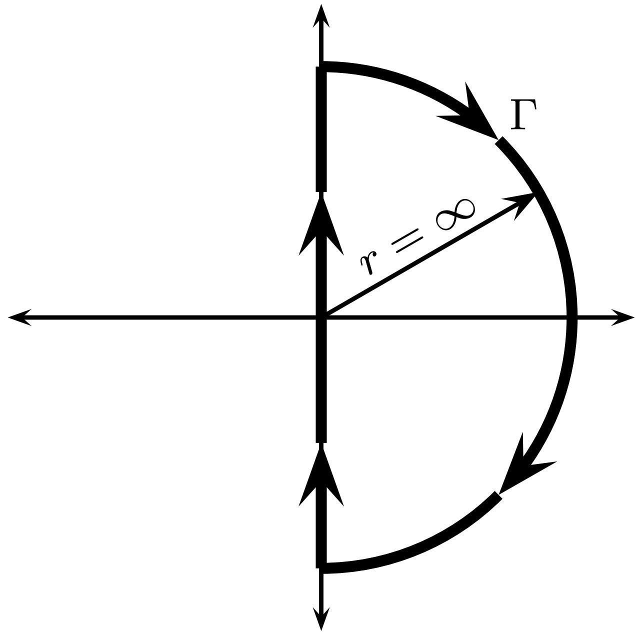


Figura 8: Trayectoria de Nyquist para el caso general

Trayectoria de Nyquist

Si $G(s)H(s)$ tiene polos en el eje imaginario es necesario modificar la trayectoria mediante pequeñas semicircunferencias de radio arbitrariamente pequeño ε

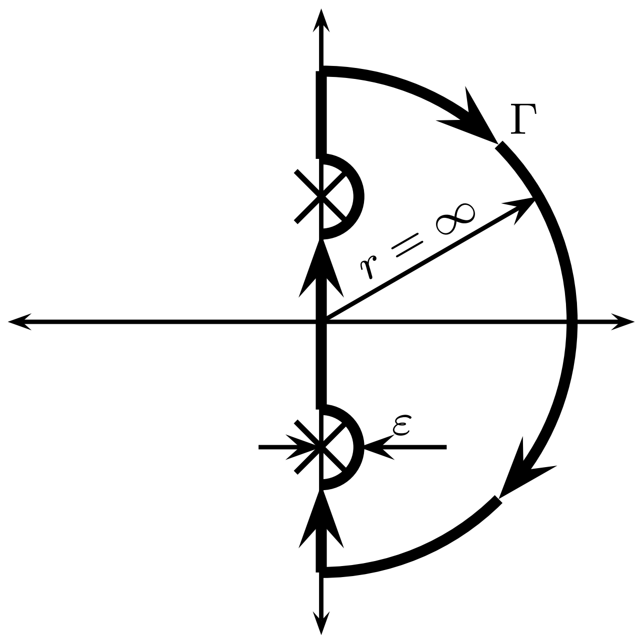


Figura 9: Trayectoria de Nyquist con polos en el eje imaginario

Diagrama de Nyquist

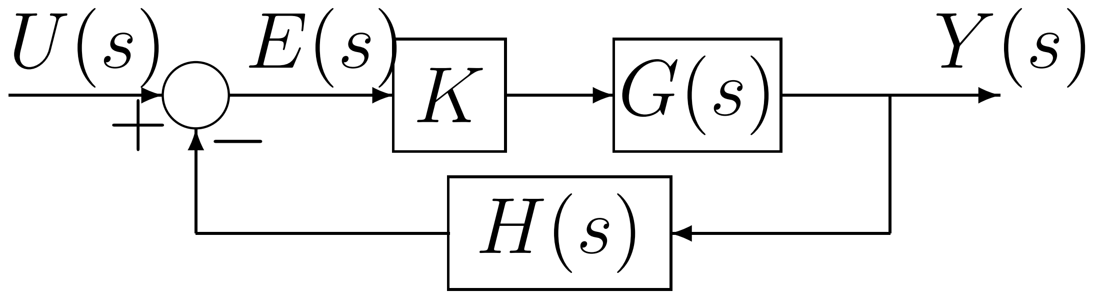


Figura 10: Sistema contínuo retroalimentado simple

el diagrama de Nyquist es la trayectoria orientada que resulta de calcular $G(s)H(s)$ através de la trayectoria de Nyquist

Diagrama de Nyquist

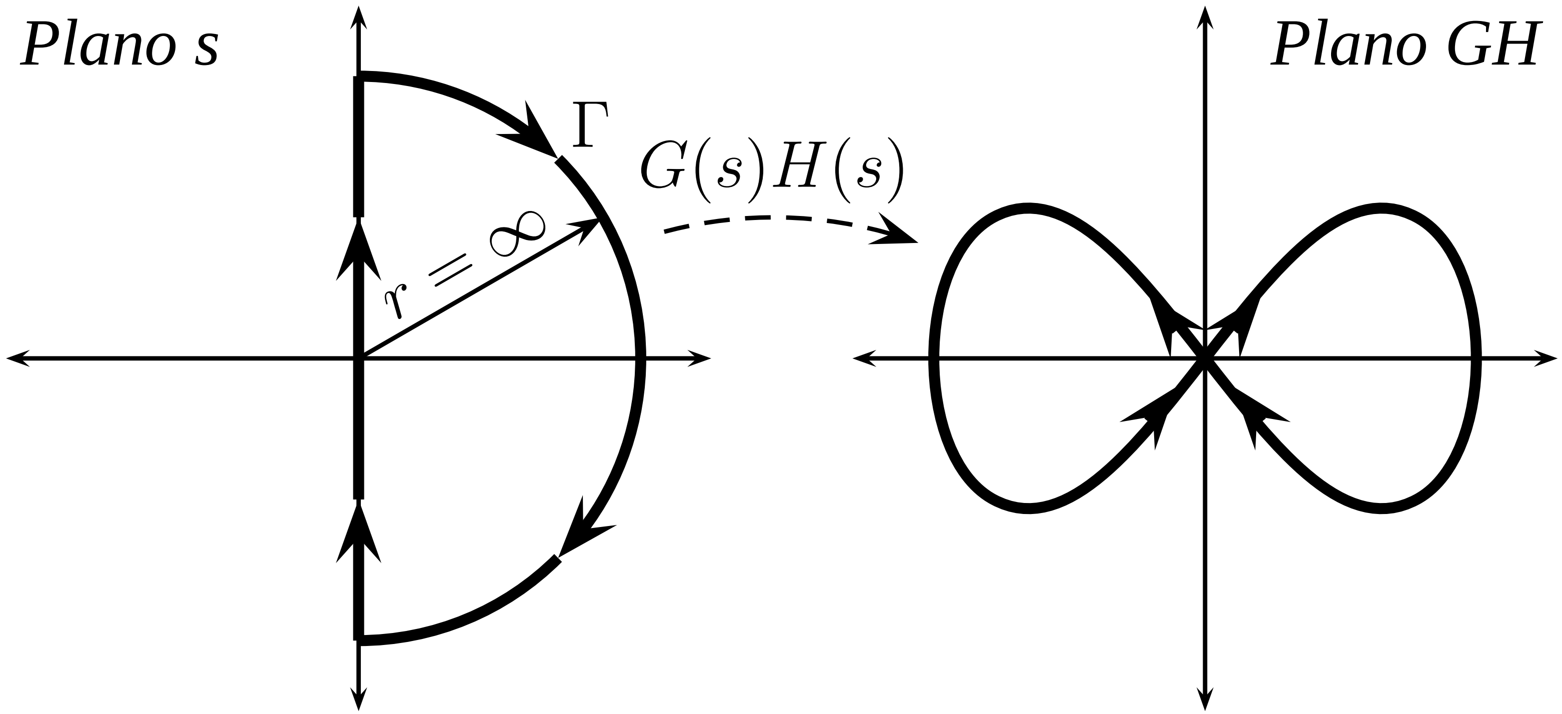


Figura 11: Diagrama de Nyquist

Diagrama de Nyquist

Ejemplo:

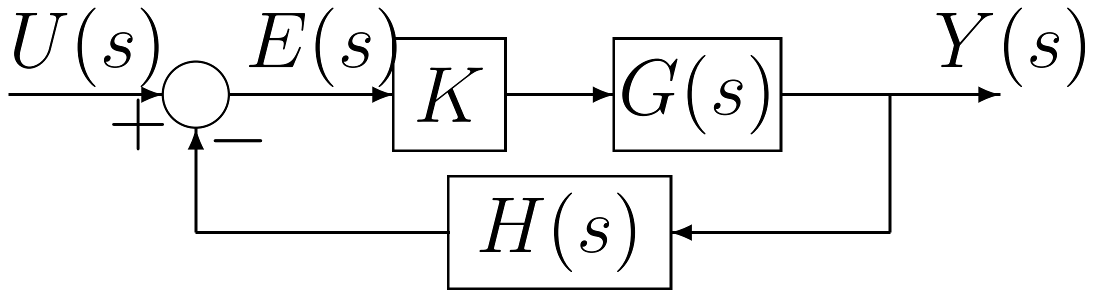
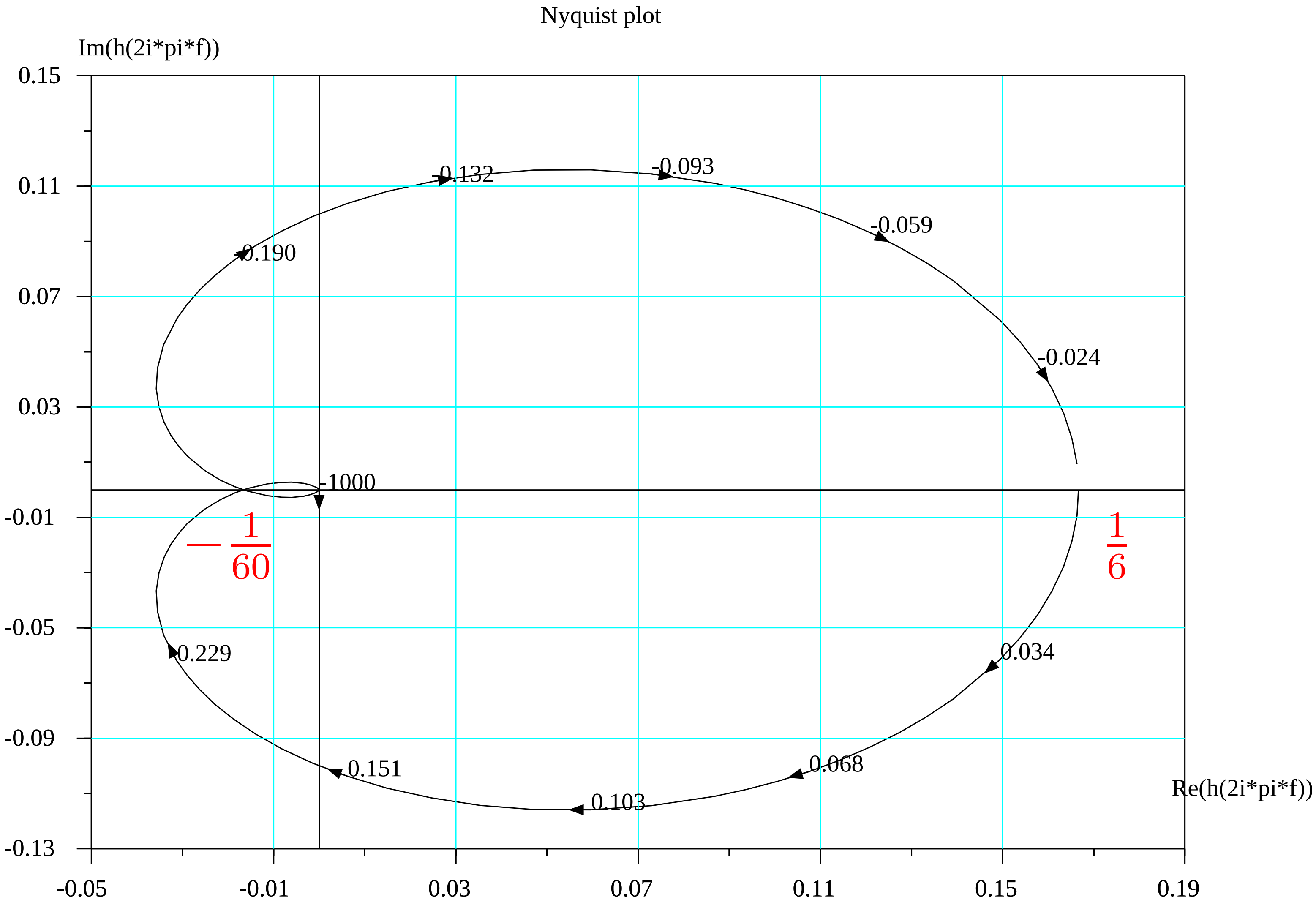


Figura 12: Sistema contínuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

Diagrama de Nyquist



Criterio de Nyquist

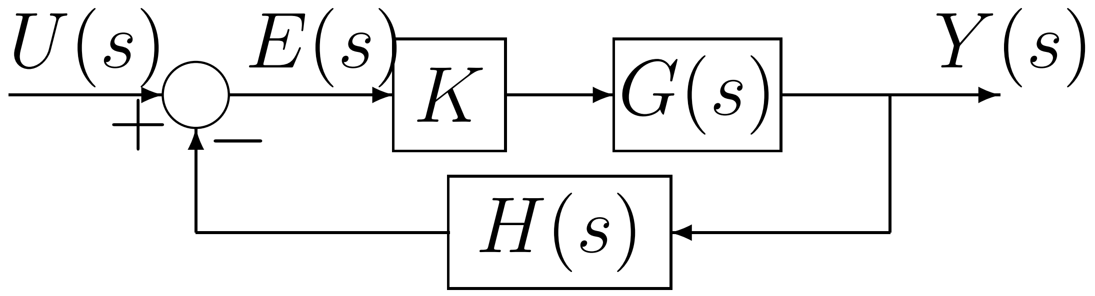


Figura 14: Sistema contínuo retroalimentado simple

Con $K = 1$ definimos

$$R(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G(s)}{D_G(s)}\frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

$$R(s) = \frac{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)}$$

Criterio de Nyquist

Calculamos $R(s)$ a lo largo de la trayectoria de Nyquist Γ, el resultado es una curva Υ. Según el principio del argumento:

Número de veces que Υ encierra al origen	$=$	Número de ceros de $R(s)$ encerrados por Γ	$-$	Número de polos de $R(s)$ encerrados por Γ

Criterio de Nyquist

$$F(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)}$$

$$R(s) = \frac{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)}$$

- La curva Γ encierra todo el semiplano derecho
- Los polos de $R(s)$ son los mismos polos de $G(s)H(s)$
- Los ceros de $R(s)$ son los mismos polos del sistema realimentado (con $k = 1$)

Criterio de Nyquist

$$\begin{array}{p{4cm}cp{4cm}cp{4cm}} \text{Número de veces que } \Upsilon \text{ encierra al origen} & = & \text{Número de ceros de } R(s) \text{ encerrados por } \Gamma & - & \text{Número de polos de } R(s) \text{ encerrados por } \Gamma \end{array}$$

Se convierte en

$$\begin{array}{p{4cm}cp{4cm}cp{4cm}} \text{Número de veces que } \Upsilon \text{ encierra al origen} & = & \text{Número de polos del sistema realimentado en el semiplano derecho} & - & \text{Número de polos de } G(s)H(s) \text{ en el semiplano derecho} \end{array}$$

Criterio de Nyquist

Υ es la curva que resulta de calcular $R(s)$ a lo largo de la trayectoria de Nyquist Γ.

$$R(s) = 1 + G(s)H(s)$$

Υ es igual al diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ desplazado a la derecha una unidad.

Evaluar cuántas veces encierra Υ *al origen es igual que evaluar cuántas veces encierra el diagrama de Nyquist de* $G(s)H(s)$ *el punto* $(-1, 0)$.

Criterio de Nyquist

Criterio de Nyquist: El número de polos en el semiplano derecho que tiene un sistema contínuo realimentado , con $k = 1$ puede determinarse a partir de la ecuación

Número de veces que el diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ encierra al punto $(-1,0)$	$=$	Número de polos del sistema realimentado en el semiplano derecho	$-$	Número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho

Para que el sistema realimentado sea estable debe tener cero polos en el semiplano derecho.

Criterio de Nyquist

El criterio de Nyquist también permite determinar qué valores puede tener k en para que el sistema realimentado sea estable.
Para ello debe notarse que el diagrama de Nyquist de $kG(s)H(s)$ difiere del diagrama de nyquist de $G(s)H(s)$ sólo en la escala, es decir tienen la misma forma, pero el primero está amplificado respecto al segundo k veces. Observando el diagrama de Nyquist puede determinarse qué tanto debe amplificarse $G(s)H(s)$ para asegurar que no haya polos en el semiplano derecho.

Criterio de Nyquist

Ejemplo

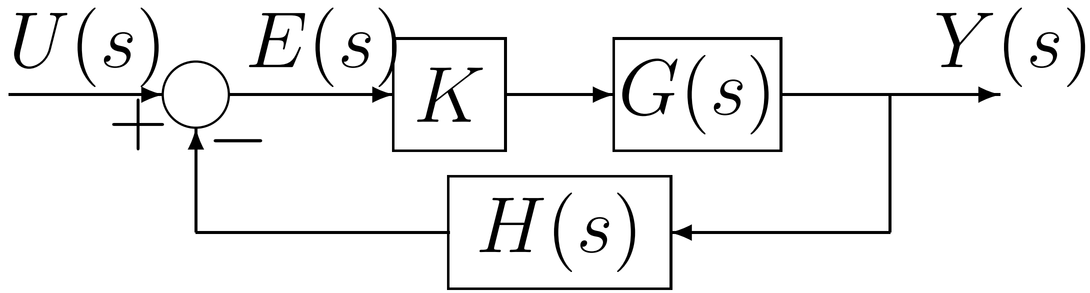
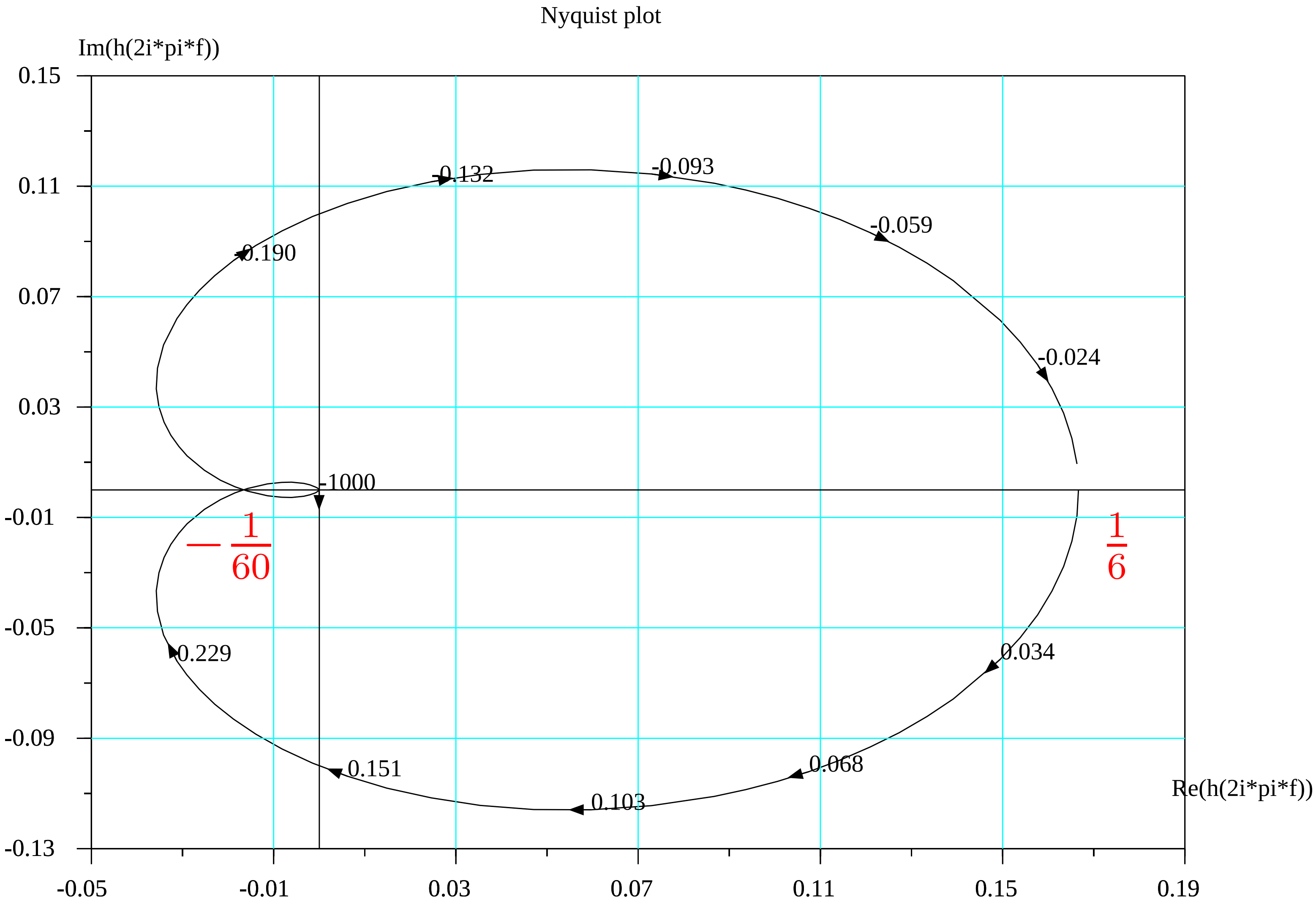


Figura 15: Sistema contínuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

Criterio de Nyquist



Criterio de Nyquist

El número de polos que $G(s)H(s)$ tiene en el semiplano derecho es cero. De esta forma, el criterio de Nyquist, establece que:

$$0 = \text{Número de polos del sistema realimentado en el semiplano derecho} - 0$$

y por lo tanto el sistema realimentado es estable.

Criterio de Nyquist

Además, en el diagrama de Nyquist se observa que éste se puede amplificar hasta 60 veces sin que cambie el número de veces que encierra al punto $(-1, 0)$, lo que significa que para $0 < k < 60$ el sistema sigue siendo estable. Si se amplifica por un valor superior a 60 el punto $(-1, 0)$ resulta encerrado dos veces por el diagrama, y por lo tanto el sistema realimentado tendrá dos polos en el semiplano derecho, es decir, será inestable.

Criterio de Nyquist

Para estudiar los valores negativos de k que harían que el sistema fuera estable, podríamos trazar el diagrama de nyquist de $-G(s)H(s)$; sin embargo esto no es necesario, ya que ese diagrama sólo puede diferir del de $G(s)H(s)$ en una rotación de 180^o, por lo tanto es suficiente con averiguar qué tantas veces se encierra el punto $(1,0)$.

Criterio de Nyquist

Remitiéndonos nuevamente al ejemplo, observamos que podemos amplificar 6 veces el diagrama sin que cambie el número de veces que encierra al punto $(1, 0)$, lo que significa que para $-6 > k > 0$ el sistema sigue siendo estable. Si se amplifica por un valor inferior a -6 el punto $(1, 0)$ resulta encerrado una vez por el diagrama, y por lo tanto el sistema realimentado tendrá un polo en el semiplano derecho, es decir, será inestable.