

Sistemas Realimentados Simples

Estabilidad de Sistemas Discretos

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Sistema Discreto

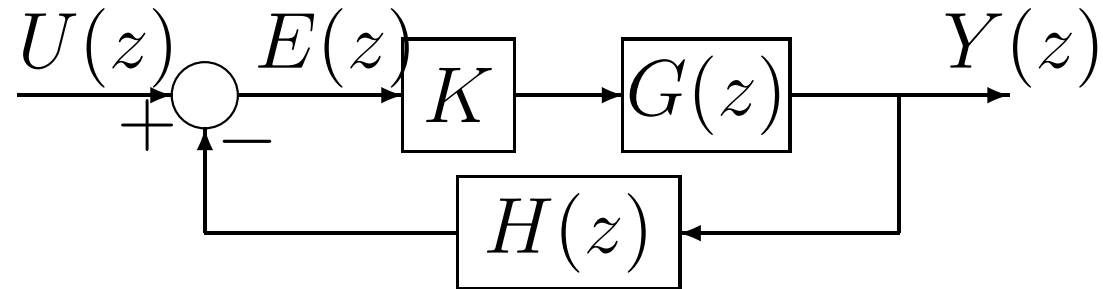


Figura 1: Sistema discreto retroalimentado simple

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)H(z)}$$

¿ $F(z)$ es estable?, es decir, ¿sus polos están en el círculo unitario?

Varias estrategias

1. Obtener un sistema continuo equivalente
 - Transformación Bilineal
2. Métodos propios
 - Criterio de Jury
3. Adaptar métodos de sistemas continuos
 - Root-Locus
 - Criterio de Bode
 - Criterio de Nyquist

Transformación Bilineal

La transformación

$$r = \frac{z + 1}{z - 1}$$

Se conoce como la *Transformación bilineal*, ya que al despejar r resulta una expresión similar:

$$z = \frac{r + 1}{r - 1}$$

Transformación Bilineal

$$r = \frac{z + 1}{z - 1}$$

Transforma la circunferencia unitaria en el eje imaginario:

Demostración:

supongamos un valor de z que está en la circunferencia unitaria, es decir $z = \cos \phi + j \sin \phi$ para algún valor de ϕ .

Al aplicar la transformación z se transforma en

$$r = \frac{\cos \phi + j \sin \phi + 1}{\cos \phi + j \sin \phi - 1}$$

Transformación Bilineal

$$r = \frac{\cos \phi + j \sin \phi + 1}{\cos \phi + j \sin \phi - 1}$$

que puede escribirse como

$$r = \frac{1 + \cos \phi + j \sin \phi}{-1 + \cos \phi + j \sin \phi}$$

$$r = \frac{(1 + \cos \phi + j \sin \phi) (-1 + \cos \phi - j \sin \phi)}{(-1 + \cos \phi + j \sin \phi) (-1 + \cos \phi - j \sin \phi)}$$

$$r = \frac{-j2 \sin \phi}{2 - 2 \cos \phi} = \frac{j \sin \phi}{\cos \phi - 1}$$

Transformación Bilineal

z	r
$1 + j0$	indefinido
$0,707 + j0,707$	$0 - j2,4142$
$0 + j1$	$0 - j1$
$-0,707 + j0,707$	$0 - j0,4142$
$-1 + j0$	$0 + j0$
$-0,707 - j0,707$	$0 + j0,4142$
$0 - j1$	$0 + j1$
$0,707 - j0,707$	$0 + j2,4142$

Transformación Bilineal

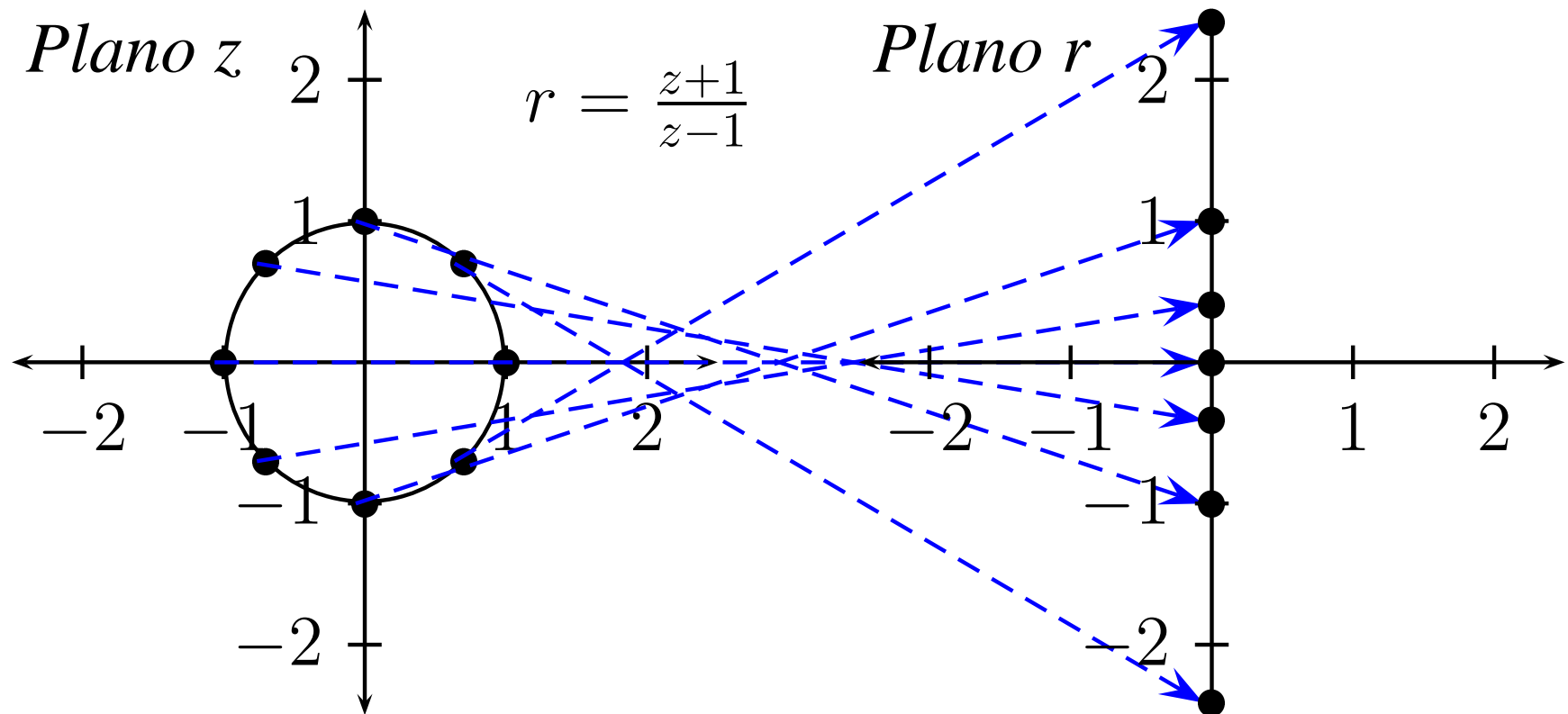


Figura 2: Transformación Bilineal

Ejemplo

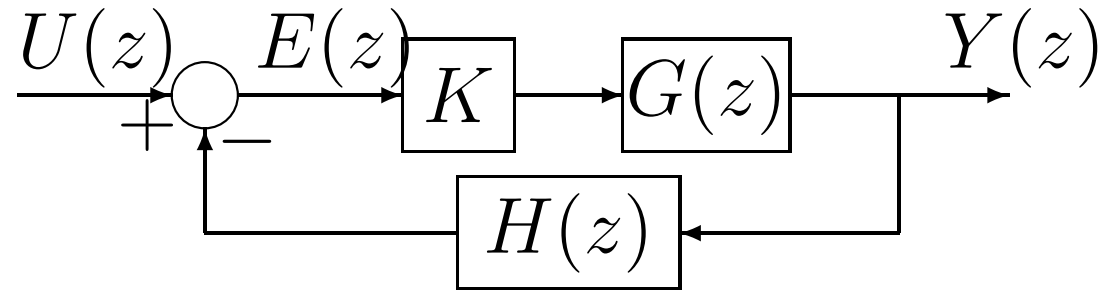


Figura 3: Sistema discreto retroalimentado simple

$$G(z) = \frac{1}{z + 0,3} \quad H(z) = \frac{1}{z + 0,7}$$

$$F(z) = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)H(z)} = \frac{k \frac{1}{(z+0,3)}}{1 + k \frac{1}{(z+0,3)} \frac{1}{(z+0,7)}}$$

Ejemplo

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$F(z) = \frac{k \frac{1}{(z+0,3)}}{1 + k \frac{1}{(z+0,3)} \frac{1}{(z+0,7)}} = \frac{k(z + 0,7)}{z^2 + z + (k + 0,21)}$$

Al aplicar la transformación bilineal a $F(z)$ se obtiene

$$\hat{F}(r) = \frac{k \left(\left(\frac{r+1}{r-1} \right) + 0,7 \right)}{\left(\frac{r+1}{r-1} \right)^2 + \left(\frac{r+1}{r-1} \right) + (k + 0,21)}$$

$$\hat{F}(r) = \frac{k(r^2 - 1,4r - 0,3)}{r^2(2,21 + k) + r(1,58 - 2k) + 0,21 + k}$$

Ejemplo

Los valores de K que hacen que todas las raíces de $F(z)$ estén dentro del círculo unitario en el plano z son los mismos valores que hacen que todas las raíces de $\hat{F}(r)$ estén en el semiplano izquierdo del plano r .

Aplicamos Routh-Hurwitz a $\hat{F}(r)$:

$$\hat{F}(r) = \frac{K(r^2 - 1,4r - 0,3)}{r^2(2,21 + k) + r(1,58 - 2k) + 0,21 + k}$$

$$\begin{array}{l|l} r^2 & (2,21 + K) \quad (0,21 + K) \\ r^1 & (1,58 - 2K) \\ r^0 & (0,21 + K) \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{l|l} r^2 & (2,21 + K) \quad (0,21 + K) \\ r^1 & (1,58 - 2K) \\ r^0 & (0,21 + K) \end{array}$$

Condiciones de Estabilidad

$$2,21 + K > 0 \quad 1,58 - 2K > 0 \quad 0,21 + K > 0$$

O lo que es equivalente:

$$\boxed{-0,21 < K < 0,79}$$

Criterio de Jury

Es un método análogo al del Criterio de Routh-Hurwitz. Se trata de construir un arreglo (el *Arreglo de Jury*) y analizarlo. Dado un polinomio $p(z)$

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0$$

en donde los coeficientes a_i son reales y a_n es positivo, es posible construir el *Arreglo de Jury* de $p(z)$ a partir de los coeficientes a_i

Arreglo de Jury

Fila	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{n-k}	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-k}	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_k	\dots	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-k}	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_{k-1}	\dots	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-k}	\dots	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_{k-2}	\dots	c_0		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots					
$2n - 5$	p_0	p_1	p_2	p_3					
$2n - 4$	p_3	p_2	p_1	p_0					
$2n - 3$	q_0	q_1	q_2						

Arreglo de Jury

Cada línea par contiene los mismos coeficientes que la línea inmediatamente anterior pero en el orden inverso.

Los elementos de las líneas impares se construyen así:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \dots$$

Arreglo de Jury

Es decir, el primer elemento de una fila impar se calcula como el determinante de la matriz construida tomando de las dos líneas inmediatamente anteriores la primera y la última columna; el segundo elemento de forma similar pero con la primera y la penúltima columnas; el tercero con la primera y la antepenúltima. Dado que el último elemento sería el determinante de la matriz formada con dos columnas iguales (la primera dos veces), este valor será siempre cero, y por tanto no se escribe en el arreglo (se ha eliminado).

Ejemplo

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4$$

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	2	3	4	5
2	5	4	3	2	1
3	b_0	b_1	b_2	b_3	
4	b_3	b_2	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2		

$$b_0 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -24 \quad b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12 \quad b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

Ejemplo

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4$$

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	2	3	4	5
2	5	4	3	2	1
3	-24	-18	-12	-6	
4	-6	-12	-18	-24	
5	c_0	c_1	c_2		

$$c_0 = \begin{vmatrix} -24 & -6 \\ -6 & -24 \end{vmatrix} = 504 \quad c_1 = \begin{vmatrix} -24 & -12 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} = 360$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} -24 & -18 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 180$$

Ejemplo

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4$$

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	2	3	4	5
2	5	4	3	2	1
3	-24	-18	-12	-6	
4	-6	-12	-18	-24	
5	504	360	180		

Criterio de Jury

Las condiciones necesarias y suficientes para que $p(z)$ tenga todas sus raíces en el interior del círculo unitario del plano z son:

$$p(1) > 0$$

$$p(-1) \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ < 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} |a_0| < a_n \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \vdots \\ |q_0| > |q_2| \end{array} \right\} n - 1 \text{ restricciones}$$

Criterio de Jury

Nótese que este criterio se reduce a unas condiciones muy simples para el caso de polinomios de segundo orden ($n = 2$):

$$p(1) > 0$$

$$p(-1) > 0$$

$$|a_0| < a_2$$

Ejemplo

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4$$

$$p(1) = 1 + 2(1)^1 + 3(1)^2 + 4(1)^3 + 5(1)^4 = 15 > 0$$

$$p(-1) = 1 + 2(-1)^1 + 3(-1)^2 + 4(-1)^3 + 5(-1)^4 = 3 > 0$$

$$1 = |a_0| < a_4 = 5$$

$$24 = |b_0| > |b_3| = 6$$

$$504 = |c_0| > |c_2| = 180$$

Por lo que $p(z)$ tiene todas su raíces en el interior del círculo unitario. Efectivamente, las raíces de $p(z)$ son:

$$r_{1,2} = 0,1378 \pm i0,6782 \quad r_{3,4} = -0,5378 \pm i0,3583$$

Ejemplo

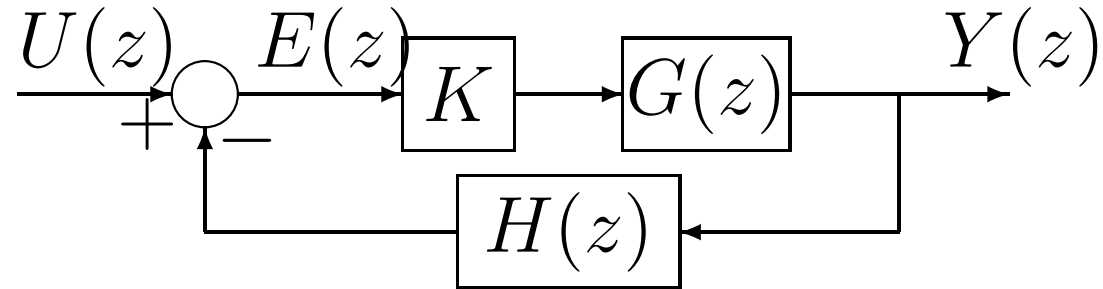


Figura 4: Sistema discreto retroalimentado simple

$$G(z) = \frac{1}{z + 0,3} \quad H(z) = \frac{1}{z + 0,7}$$

$$F(z) = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)H(z)} = \frac{k(z + 0,7)}{z^2 + z + (k + 0,21)}$$

Ejemplo

$$F(z) = \frac{k(z + 0,7)}{z^2 + z + (k + 0,21)}$$

Las condiciones son:

$$p(1) = 1 + 1 + (0,21 + K) > 0$$

$$p(-1) = 1 - 1 + (0,21 + K) > 0$$

$$|0,21 + K| = |a_0| < a_2 = 1$$

$$K > -2,21$$

$$K > -0,21$$

$$-1,21 < K < 0,79$$

$$\boxed{-0,21 < K < 0,79}$$

Root-Locus

El root-locus y el root-locus complementario muestran cómo varía la ubicación de los polos de un sistema realimentado al variar K . Pueden emplearse estos diagramas en forma análoga a como se emplean en el caso continuo para determinar la estabilidad de un sistema discreto: *deben encontrarse las condiciones para que todas las ramas del root-locus y el root-locus complementario estén en el interior del círculo unitario.*

Ejemplo

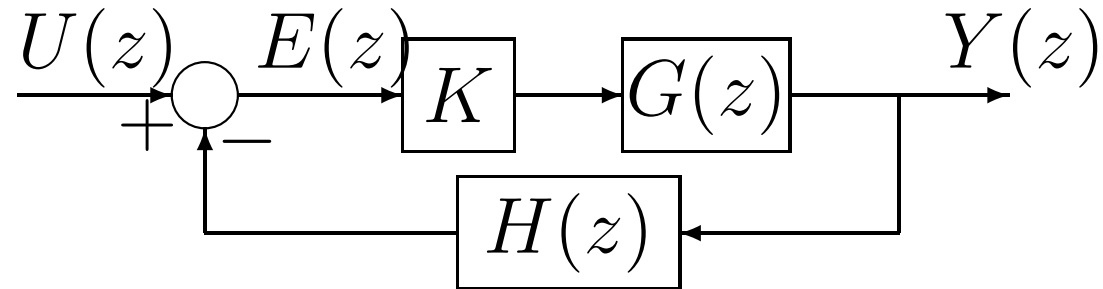
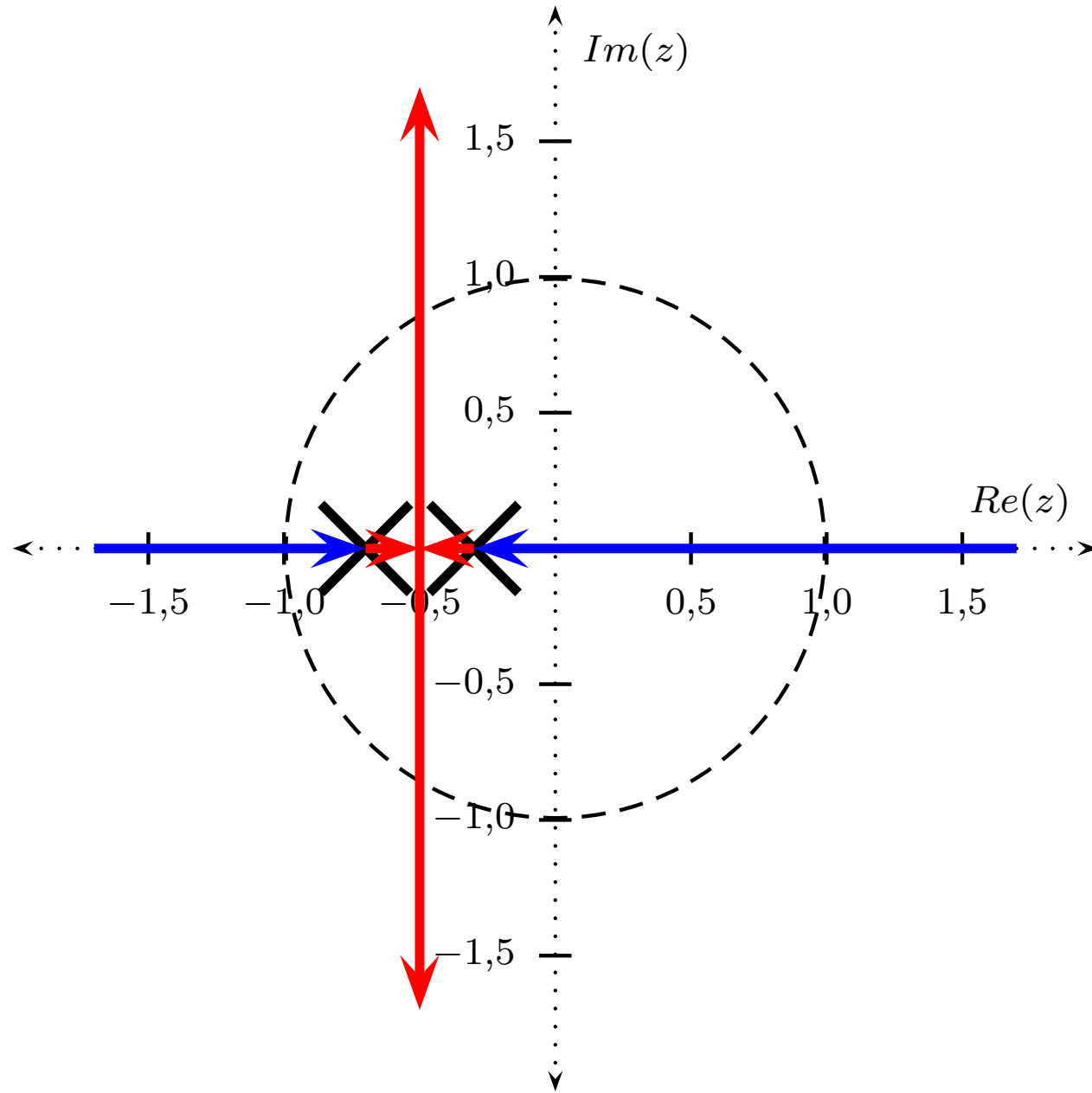


Figura 5: Sistema discreto retroalimentado simple

$$G(z) = \frac{1}{z + 0,3} \quad H(z) = \frac{1}{z + 0,7}$$

$$F(z) = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)H(z)} = \frac{k(z + 0,7)}{z^2 + z + (k + 0,21)}$$

Ejemplo



Ejemplo

El root-locus cruza el eje imaginario en

$-0,5 \pm i\sqrt{1 - 0,5^2} = -0,5 \pm j0,86$, Estos puntos corresponden a una ganancia K_{c1} positiva tal que

$$K_{c1} = \left| \frac{1}{(-0,5 + j0,86 + 0,3)(-0,5 + j0,86 + 0,7)} \right|$$

$$K_{c1} = 0,79$$

Ejemplo

El root-locus complementario cruza el eje imaginario en -1 y en 1 . Estos puntos corresponden a unas ganancias K_{c2} y K_{c3} negativa tales que

$$K_{c2} = - \left| \frac{1}{(-1 + 0,3)(-1 + 0,7)} \right| = -0,21$$

$$K_{c3} = - \left| \frac{1}{(1 + 0,3)(1 + 0,7)} \right| = -2,21$$

$$\boxed{-0,21 < K < 0,79}$$

Diagramas y Criterio de Bode

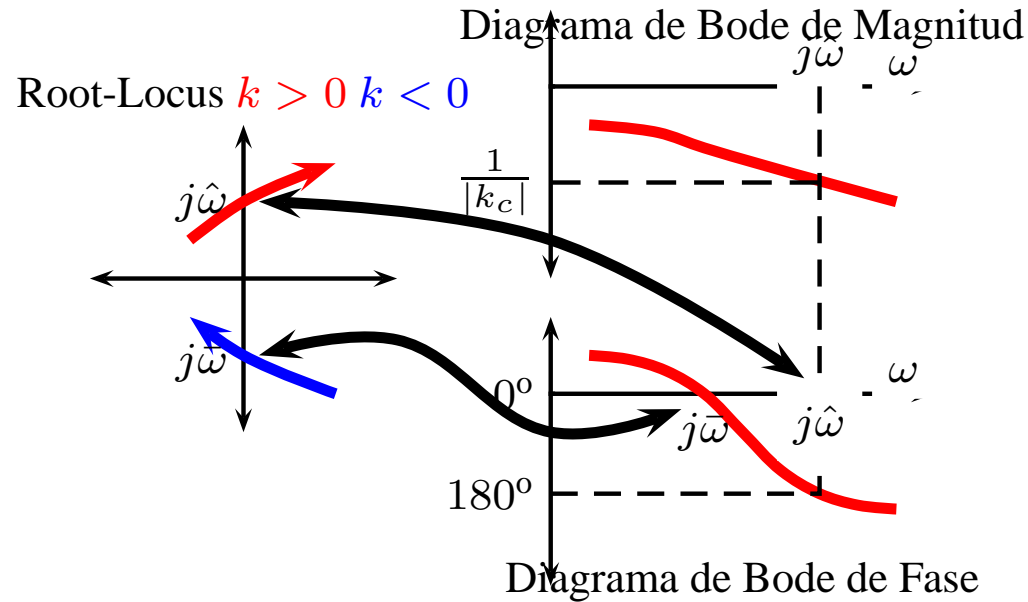


Figura 7: Relación entre el root-locus y los diagramas de Bode

Diagramas y Criterio de Bode

Ya no es interesante recorrer el eje imaginario $j\omega$, sino la circunferencia unitaria. Esta última se puede recorrer con la función $e^{j\omega}$, variando ω entre 0 y 2π . En efecto, podemos emplear la Fórmula de Euler para escribir

$$\begin{aligned}\cos j\omega &= \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \\ \sin j\omega &= \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}\end{aligned}$$

$$e^{j\omega} = \cos x + j \sin$$

$e^{j\omega}$ es un número complejo de magnitud 1 y ángulo ω , por lo tanto, si ω varía entre 0 y 2π se recorre la circunferencia unitaria.

Diagramas y Criterio de Bode

Al igual que en el caso contínuo, podemos argumentar la simetría del root-locus para estudiar recorrer unicamente la mitad de la circunferencia, es decir, tomar $0 \leq \omega \leq \pi$

En resumen, podemos trazar los diagramas de $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|$ y $\arg G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ con $0 \leq \omega \leq \pi$, o lo que es igual, trazar los diagramas de $|G(jf)H(jf)|$ y $\arg G(jf)H(jf)$ con $0 < f < \frac{1}{2}$. Estos son los *diagramas de bode para sistemas discretos*. y emplean las mismas escalas que los diagramas de bode para sistema contínuos.

Diagramas y Criterio de Bode

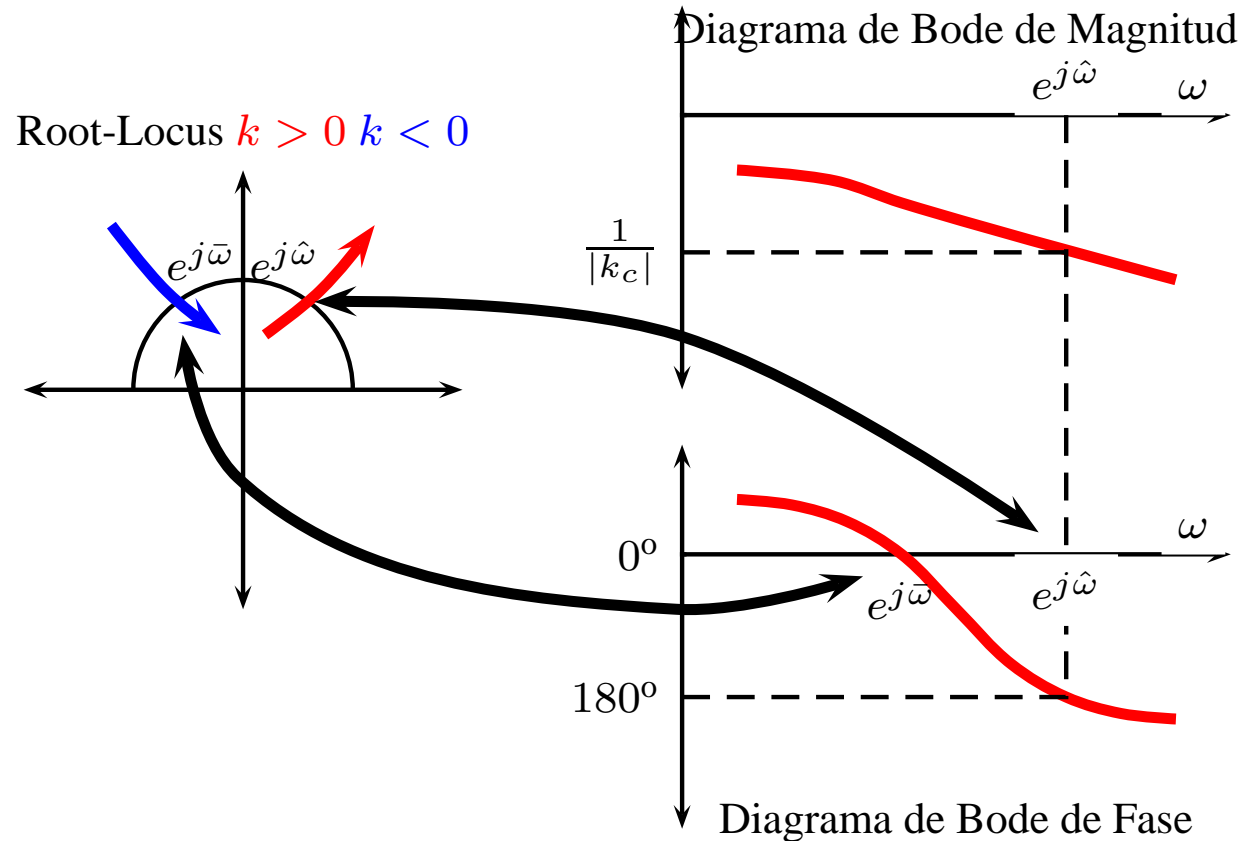


Figura 8: Relación entre el root-locus y los diagramas de Bode para el caso discreto

Ejemplo

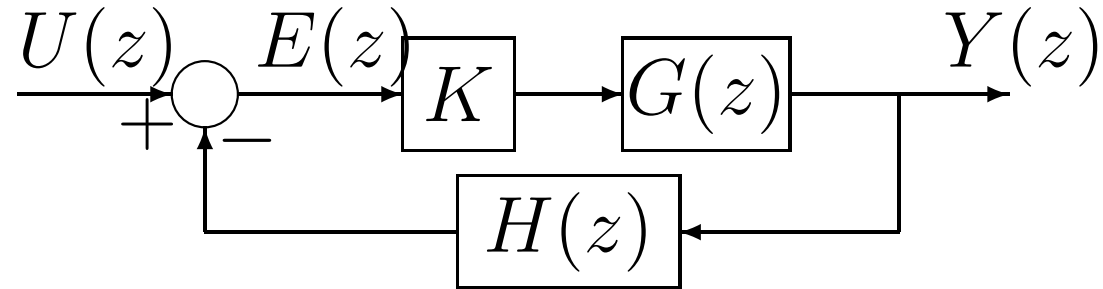
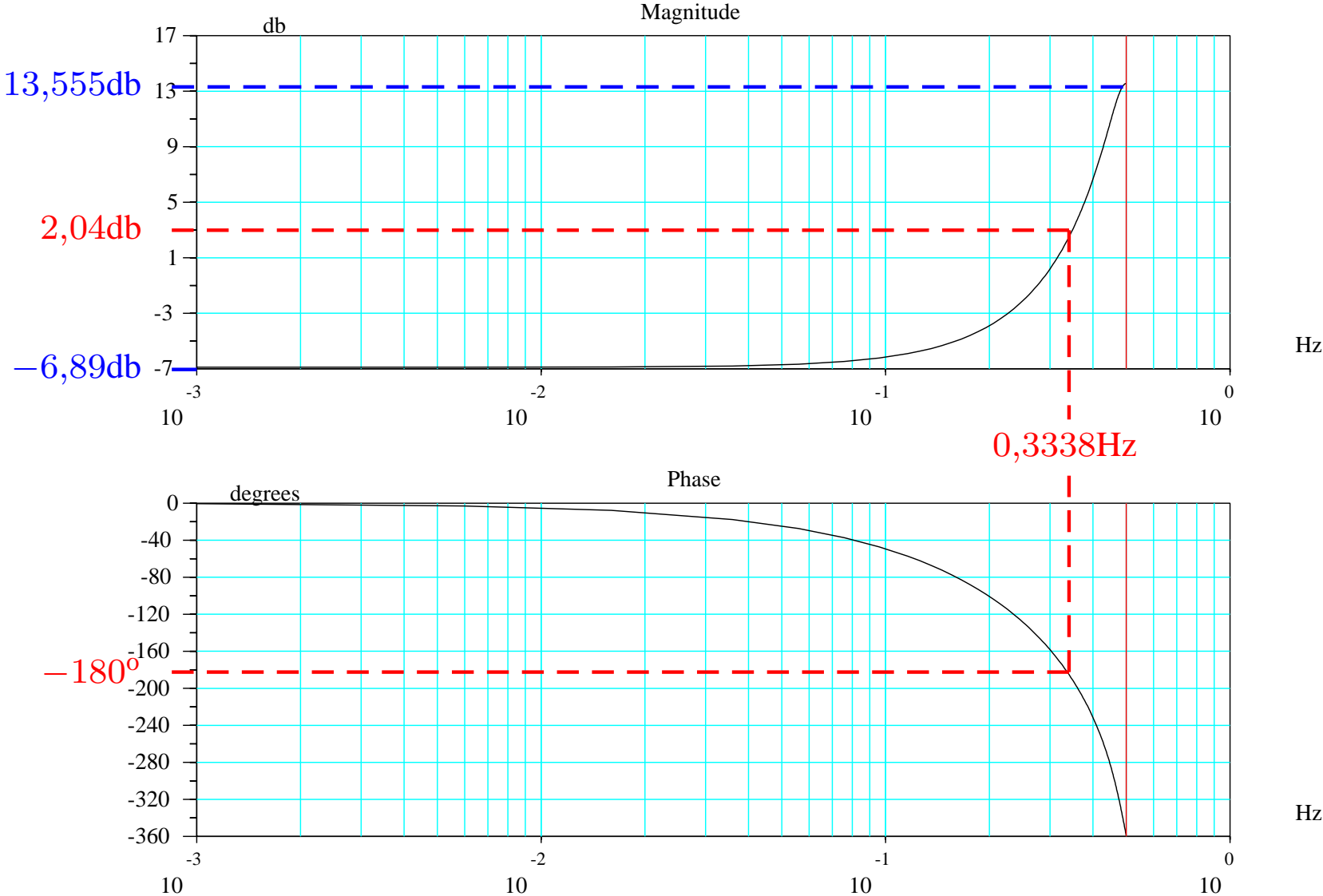


Figura 9: Sistema discreto retroalimentado simple

$$G(z) = \frac{1}{z + 0,3} \quad H(z) = \frac{1}{z + 0,7}$$

$$F(z) = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)H(z)} = \frac{k(z + 0,7)}{z^2 + z + (k + 0,21)}$$

Ejemplo



Ejemplo

El ángulo de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es -180° para una frecuencia de $0,3338\text{Hz}$, es decir para $\omega = 2\pi 0,3338 = 2,094$. En esa frecuencia el valor de la magnitud de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es de $2,04\text{db}$, lo que significa que la magnitud de K , en decibeleles, para la cual una rama del Root-Locus atraviesa la circunferencia unitaria es tal que $\frac{1}{|K_{c1}|_{\text{textendb}}} = 2,04$, lo que equivale a:

$$\frac{1}{|K_{c1}|} = 10^{\frac{|K_{c1}|_{\text{en db}}}{20}} \quad |K_{c1}| = 10^{-\frac{|K_{c1}|_{\text{en db}}}{20}}$$

$$|K_{c1}| = 10^{-\frac{2,04}{20}} = 0,79 \quad K_{c1} = 0,79$$

Ejemplo

El diagrama de fase es asintótico a 0° , es decir que para $\omega = 0$ el ángulo de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es 0° . También se observa que para una frecuencia de $\frac{1}{2}$ Hz, es decir $\omega = \pi$ el ángulo es de -360° , que es igual a 0° . Lo anterior significa que dos ramas del root locus complementario cruzan la circunferencia unitaria en K_{c2} y K_{c3} que se pueden calcular como:

$$|K_{c2}| = 10^{-\frac{-6,89}{20}} = 2,21 \quad K_{c2} = -2,21$$

$$|K_{c3}| = 10^{-\frac{13,555}{20}} = 0,21 \quad K_{c3} = -0,21$$

Diagrama y Criterio de Nyquist

El criterio de Nyquist para sistemas realimentados continuos se construye empleando una trayectoria que encierran todo el semiplano derecho y así poder emplear el principio del argumento.

Para sistemas discretos realimentados es necesario modificar la trayectoria de Nyquist, para que encierre toda la porción del plano complejo que está por fuera del círculo unitario.

Trayectoria de Nyquist

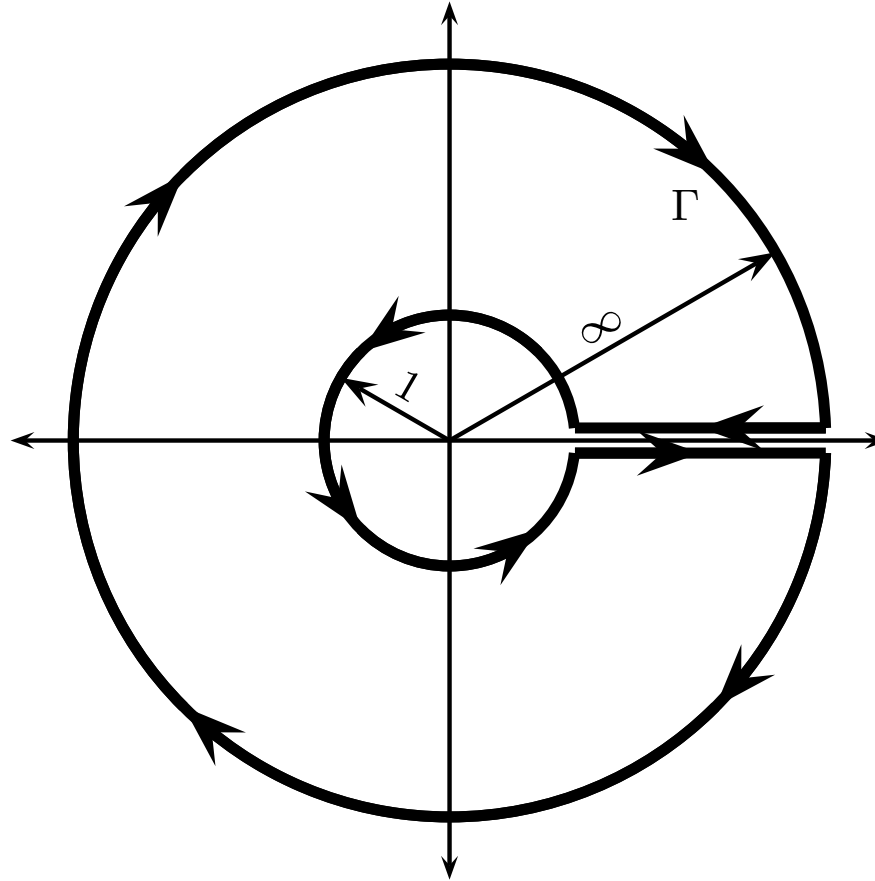


Figura 11: Trayectoria de Nyquist para el caso discreto general

Trayectoria de Nyquist

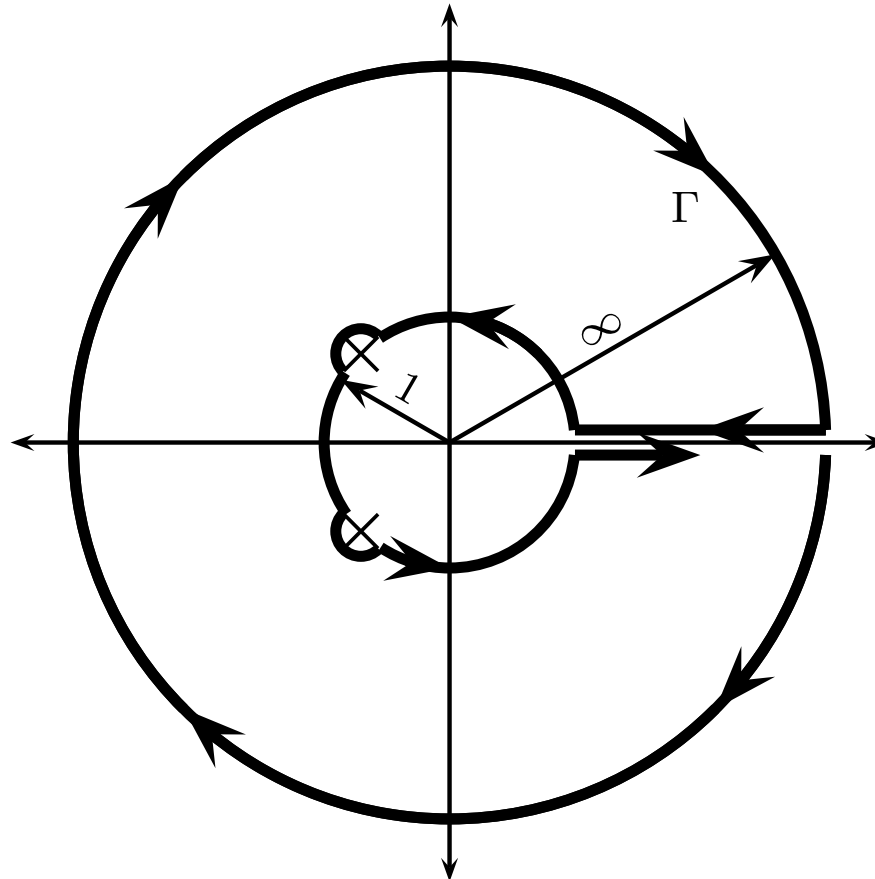


Figura 12: Trayectoria de Nyquist para el caso discreto con polos en la circunferencia unitaria

Criterio de Nyquist

Criterio de Nyquist para sistemas discretos: El número de polos por fuera del círculo unitario que tiene un sistema discreto realimentado, con $k = 1$ puede determinarse a partir de la ecuación

Número de veces que el diagrama de Nyquist discreto de $G(z)H(z)$ encierra al punto $(-1, 0)$	=	Número de polos del sistema realimentado por fuera del círculo unitario	-	Número de polos de $G(z)H(z)$ por fuera del círculo unitario
---	---	---	---	--

Ejemplo

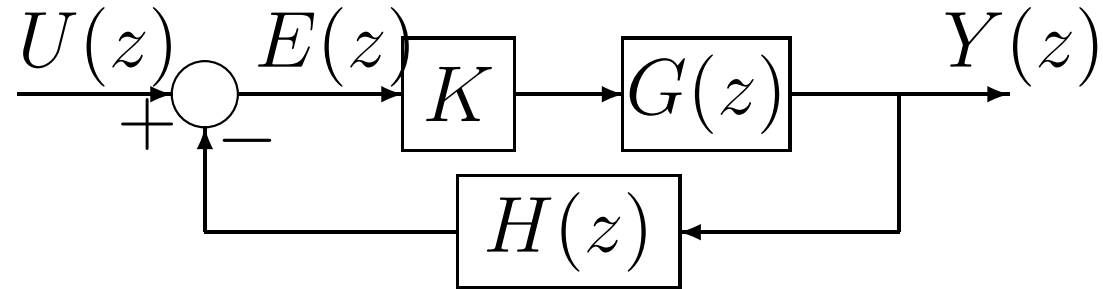
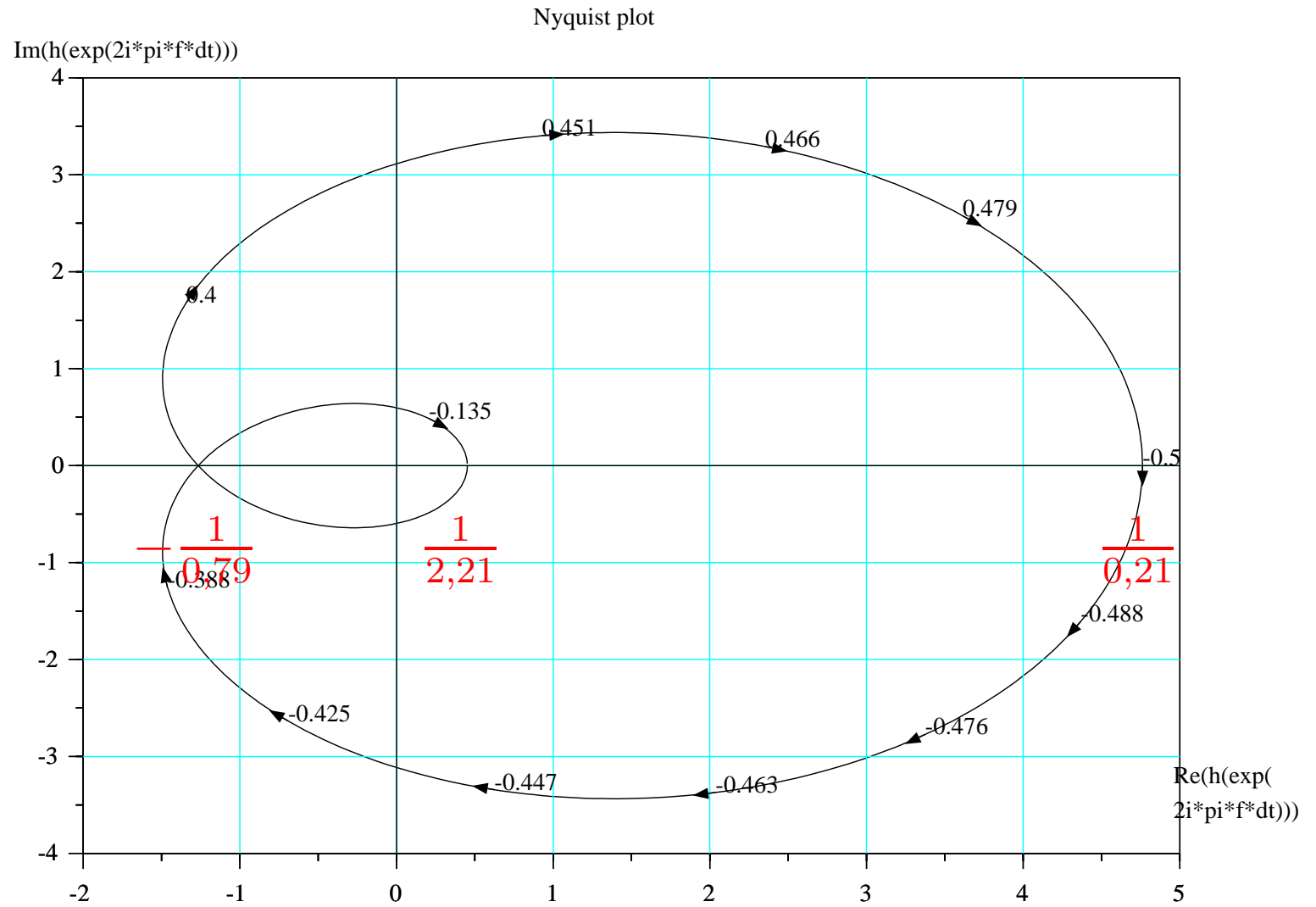


Figura 13: Sistema discreto retroalimentado simple

$$G(z) = \frac{1}{z + 0,3} \quad H(z) = \frac{1}{z + 0,7}$$

$$F(z) = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)H(z)} = \frac{k(z + 0,7)}{z^2 + z + (k + 0,21)}$$

Ejemplo



Ejemplo

El diagrama de Nyquist encierra una vez el punto $(-1, 0)$. Además, $G(z)H(z)$ tiene cero polos por fuera del círculo unitario. Según el criterio de Nyquist se tiene que

$$1 = \begin{array}{l} \text{Número de} \\ \text{polos del} \\ \text{sistema re-} \\ \text{alimentado} \\ \text{por fuera} \\ \text{del círculo} \\ \text{unitario} \end{array} - 0$$

y por lo tanto el sistema realimentado con $K = 1$ es inestable

Ejemplo

Sin embargo el número de veces que se encierra el punto $(-1, 0)$ puede ser 0 si el diagrama se amplifica por un valor positivo menor que 0,79. En estas condiciones el sistema realimentado será estable. Por lo tanto, para que el sistema realimentado sea estable con valores negativos de k , se necesita que $0 < K < 0,79$

Ejemplo

El número de veces que el diagrama de nyquist puede encerrar al punto $(1, 0)$ es 0, 1 o 2 en las siguientes condiciones:

- Si se amplifica por una cantidad menor que 0,21 lo encierra 0 veces.
- Si se amplifica por una cantidad mayor que 0,21 y menor que 2,21 lo encierra 1 vez.
- Si se amplifica por una cantidad mayor que 2,21 lo encierra 2 veces.

Ejemplo

Condiciones de Estabilidad

- Valores positivos de k : $0 < k < 0,79$
- Valores negativos de k : $0 > k > -0,21$

$$-0,21 < K < 0,79$$