Sistemas Realimentados Simples Estabilidad de Sistemas Contínuos

Diagramas de Root-Locus

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Sistema Contínuo

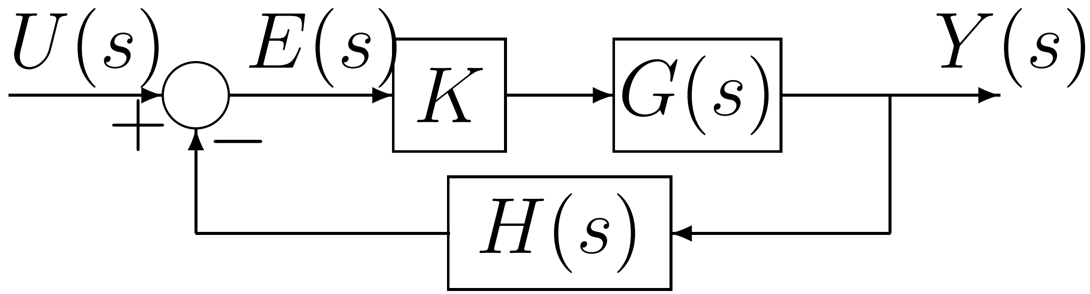


Figura 1: Sistema contínuo retroalimentado simple

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

¿$F(s)$ es estable?, es decir, ¿sus polos están en el semi-plano izquierdo?

Root-Locus

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

- Los polos de $F(s)$ dependen del valor de k.
- El *Lugar geométrico de las raices*, o simplemente *Root-locus* es el gráfico en el plano s de la ubicación de los polos de $F(s)$ conforme k varia de cero a infinito ($k : 0 \rightarrow \infty$).
- Se define también el *root-locus complementario* como el gráfico en el plano s de la ubicación de los polos de $F(s)$ conforme k varia de menos infinito a cero ($k : -\infty \rightarrow 0$)

Root-Locus. Ejemplo

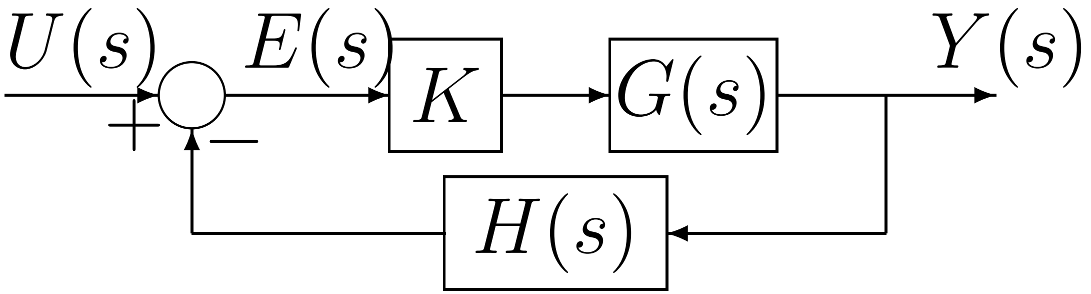


Figura 2: Sistema contínuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{k(s+3)}{s^2 + 4s + (3+k)}$$

Root-Locus. Ejemplo

$$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3+k)}}{2} = -2 \pm \sqrt{1-k}$$

k	p_1	p_2
-8	-5	1
-3	-4	0
0	-3	-1
$0{,}75$	$-2{,}5$	$-1{,}5$
1	-2	-2
2	$-2+j$	$-2-j$
5	$-2+2j$	$-2-2j$

Root-Locus. Ejemplo

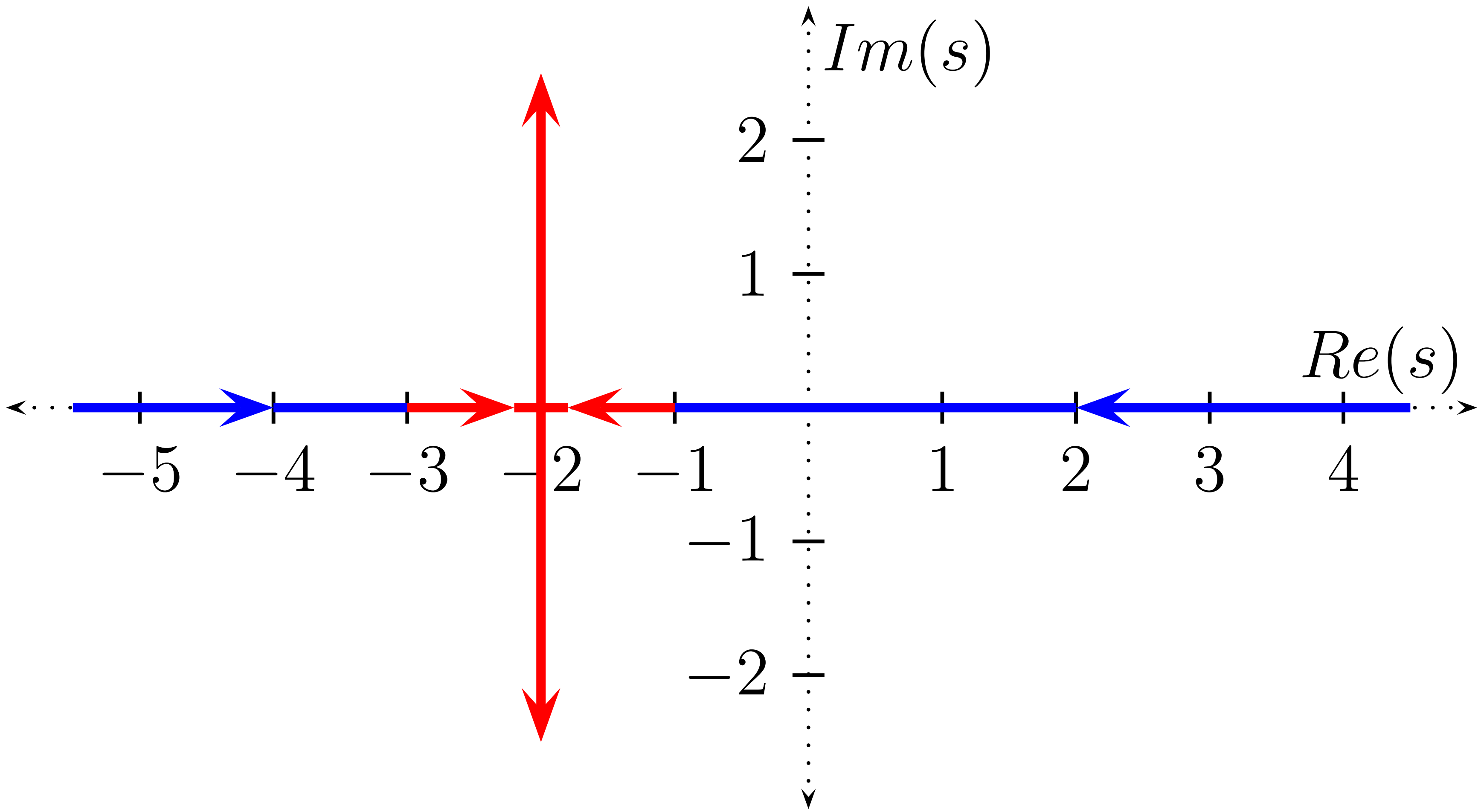


Figura 3: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo

Estabilidad con Root-Locus

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)}$$

$$D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s) = 0$$

$$\frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} = -\frac{1}{K} \qquad G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

Estabilidad con Root-Locus

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

la condición está dada en términos de la *ganancia de lazo cerrado* $G(s)H(s)$ en lugar de la Función de transferencia del sistema realimentado $F(s)$.
Dado que $G(s)$ es un complejo,La condición puede escribirse en términos de su magnitud y ángulo:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|k|} \quad \arg[G(s)H(s)] = \begin{cases} \pm 180^{\mathrm{o}} & k > 0 \\ 0^{\mathrm{o}} & k < 0 \end{cases}$$

Estabilidad con Root-Locus

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|k|} \qquad \arg[G(s)H(s)] = \begin{cases} \pm 180^{\text{o}} & k > 0 \\ 0^{\text{o}} & k < 0 \end{cases}$$

- Si un valor s_0 forma parte del Root-locus, entonces $\arg\left[G(s_0)H(s_0)\right] = \pm 180^{\text{o}}$.
- Podemos saber cuál es el valor de k que hace que la rama del root-locus pase justamente por s_0, pues $|k| = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$; como k es positiva entonces $k = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$.

Estabilidad con Root-Locus

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|k|} \quad \arg[G(s)H(s)] = \begin{cases} \pm 180^{o} & k > 0 \\ 0^{o} & k < 0 \end{cases}$$

- Si un valor s_0 forma parte del Root-locus Complementario, entonces $\arg\left[G(s_0)H(s_0)\right] = 0^{o}$.
- Podemos saber cuál es el valor de k que hace que la rama del root-locus pase justamente por s_0, pues $|k| = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$; como k es negativa entonces $k = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$.

Ejemplo

En el ejemplo anterior podemos conocer cuál es el valor de k que hace que la rama del root-locus complementario que viene desde ∞ llegue a 0.

$$k = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} = -\frac{1}{\frac{1}{(0+1)(0+3)}} = -3$$

Para valores de k menores que -3 siempre habrá un polo en el semiplano derecho, y por lo tanto el sistema será inestable.

Para valores k mayores que -3 todas las ramas del root-locus están en el semiplano izquierdo, y por lo tanto el sistema será estable.

Ejemplo

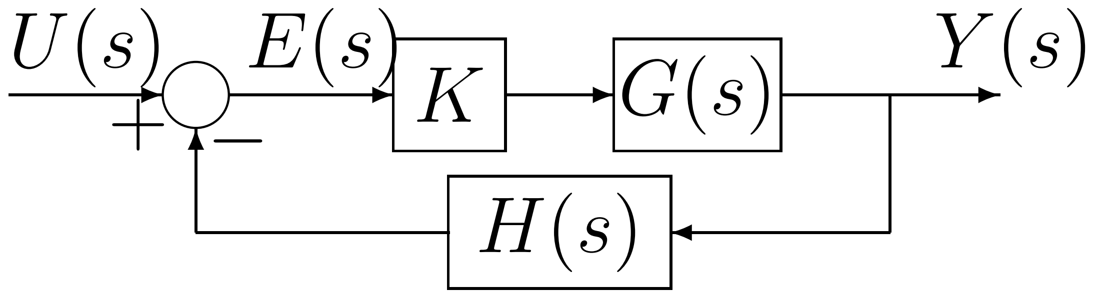
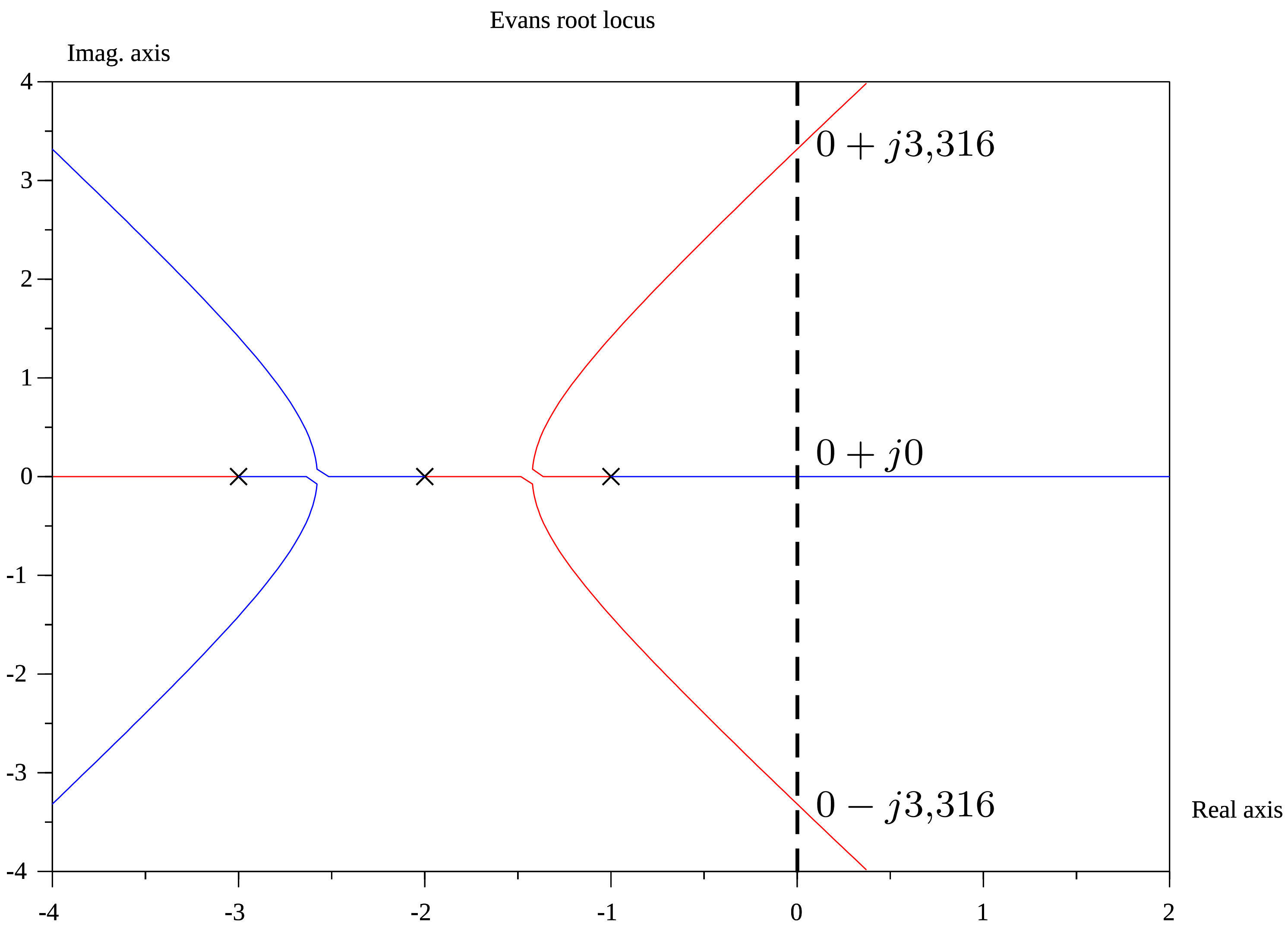


Figura 4: Sistema contínuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

Ejemplo



Root Locus

Root Locus Complementario

Ejemplo

La rama del root locus complementario cruza el eje imaginario justo en $s = 0 + j0$.

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$|G(s)H(s)|_{s=0} = \frac{1}{|(0+1)(0+2)(0+3)|} = \frac{1}{6} = \frac{1}{|k|}$$

$$|k| = 6 \qquad k = -6$$

- para $k < -6$ el sistema realimentado es inestable,
- para $-6 < k \leq 0$ es estable.

Ejemplo

Dos ramas del root locus cruzan el eje imaginario justo en $s = 0 \pm j3{,}316$.

$$|G(s)H(s)|_{s=\pm j3{,}316} = \frac{1}{|k|} =$$

$$\frac{1}{|(\pm j3{,}316+1)(\pm j3{,}316+2)(\pm j3{,}316+3)|} = \frac{1}{60}$$

$$|k| = 60 \qquad k = 60$$

- para $k > 60$ el sistema realimentado es inestable,
- para $0 \leq k < 60$ es estable.

Ejemplo

Los resultados:

- para $k < -6$ el sistema realimentado es inestable,
- para $-6 < k \leq 0$ es estable.
- para $k > 60$ el sistema realimentado es inestable,
- para $0 \leq k < 60$ es estable.

Pueden resumirse en

- para $-6 < k < 60$ es estable.
- para $k > 60$ o $k < -60$ el sistema realimentado es inestable,
- para $k = -6$ y $k = 60$ el sistema es marginalmente estable.

Reglas de Construcciǿm

Regla	RL	RLC
R_1 : Número de ramas	n	n
R_2 : Inicio de las ramas	Polos de $G(s)H(s)$ (o en ∞)	Ceros de $G(s)H(s)$ (o en ∞)
R_3 : Fin de las ramas	Ceros de $G(s)H(s)$ (o en ∞)	Polos de $G(s)H(s)$ (o en ∞)

$n =$ número de polos de $G(s)H(s)$

$m =$ número de ceros de $G(s)H(s)$

Reglas de Construcciónm

Regla	RL	RLC
R_4 : Intervalos del eje real	A la izquierda de un número impar de polos y ceros de $G(s)H(s)$	A la izquierda de un número par de polos y ceros de $G(s)H(s)$
R_5 : número de ramas que van hacia (o vienen desde) ∞	$\|n - m\|$	$\|n - m\|$

Reglas de Construccióm

Regla	RL	RLC
R_6 : Ángulos de las rectas asíntotas	$\theta_i = \frac{2i+1}{\|n-m\|}180^o$	$\theta_i = \frac{2i}{\|n-m\|}180^o$
	$i = 0, 1, \cdots, \|n-m\|$	
R_7 : centroide de las rectas asíntotas	$\sigma = \frac{\sum^n \text{polos de } G(s)H(s) - \sum^m \text{ceros de } G(s)H(s)}{\|n-m\|}$	

Ejemplo

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

4 ramas para RL y RLC.
$4-1=3$ ramas desde y hacia ∞ en RL y RLC.

$$\sigma = \frac{((0)+(-4)+(-1+j)+(-1-j)-(-1)}{4-1} = \frac{-5}{3}$$

i	RL	RLC
0	$\theta_0 = \frac{2i+1}{4-1}180^o = 60^o$	$\theta_0 = \frac{2i}{4-1}180^o = 0^o$
1	$\theta_1 = \frac{2i+1}{4-1}180^o = 180^o$	$\theta_1 = \frac{2i}{4-1}180^o = 120^o$
2	$\theta_2 = \frac{2i+1}{4-1}180^o = 300^o$	$\theta_2 = \frac{2i}{4-1}180^o = 240^o$

Ejemplo

Ubicar polos y ceros de $G(s)H(s)$:

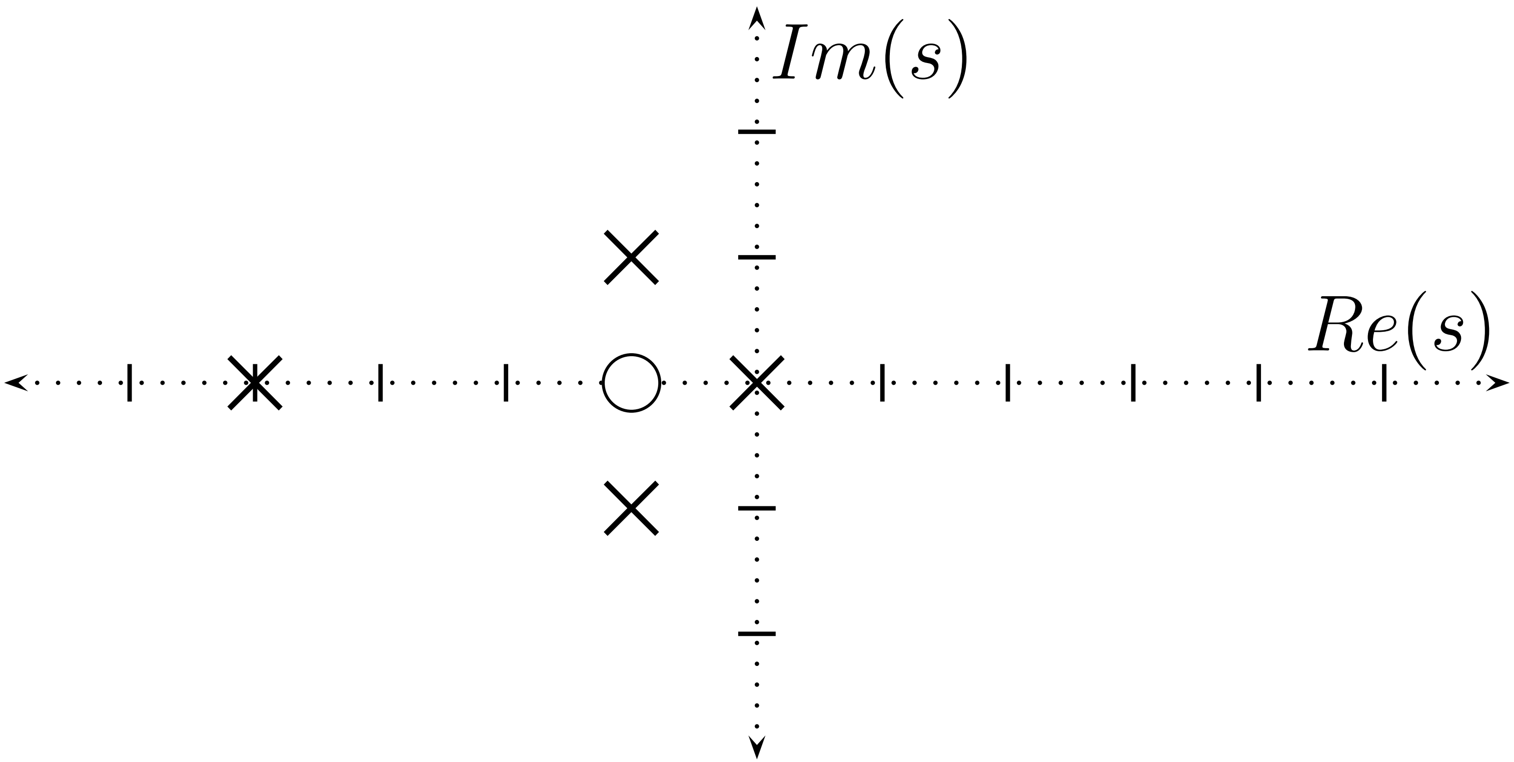


Figura 6: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo. Paso 1

Ejemplo

Usar R_4 para clasificar el eje real

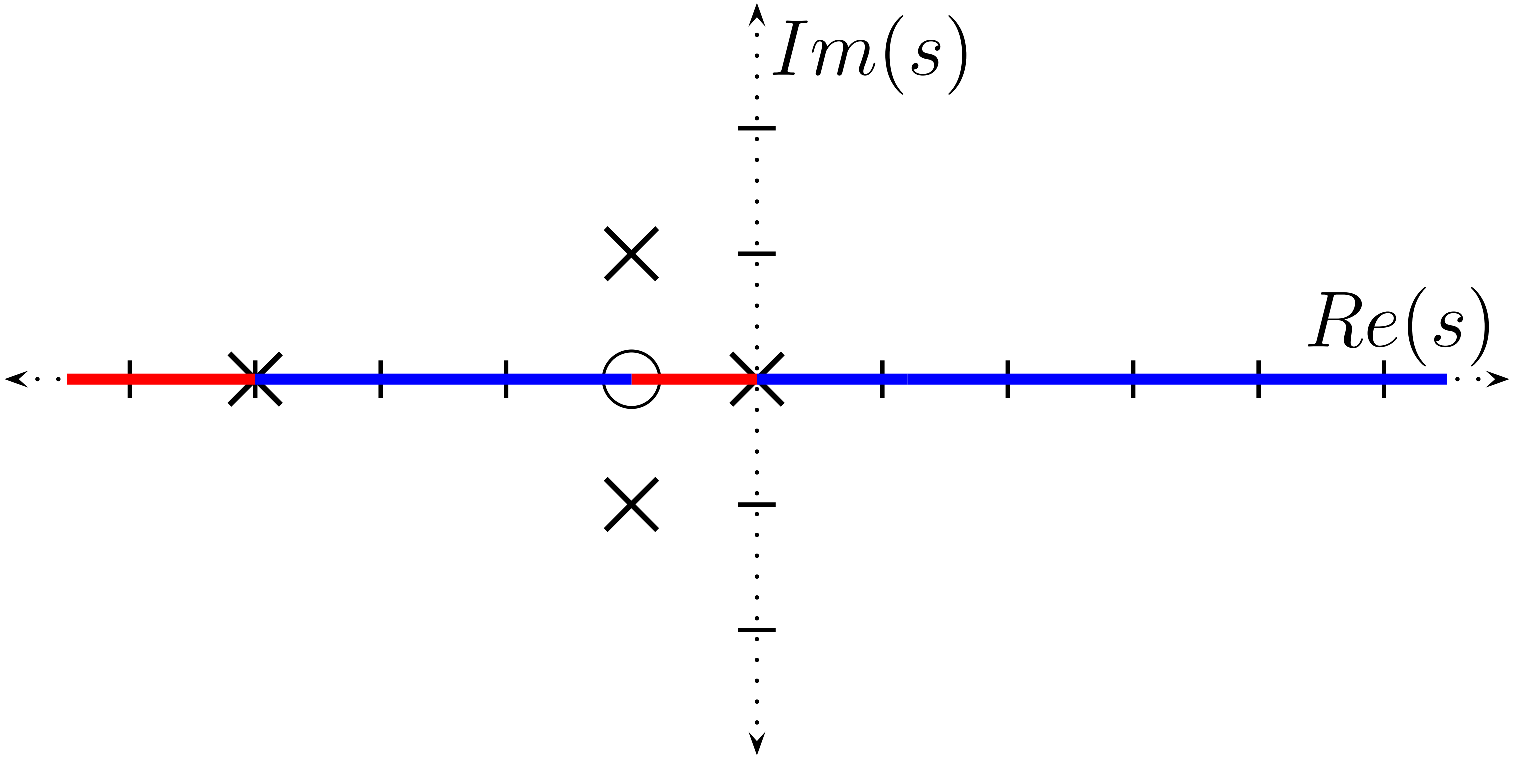


Figura 7: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo. Paso 2

Ejemplo

Usar R_2 y R_3 para orientar los intervalos

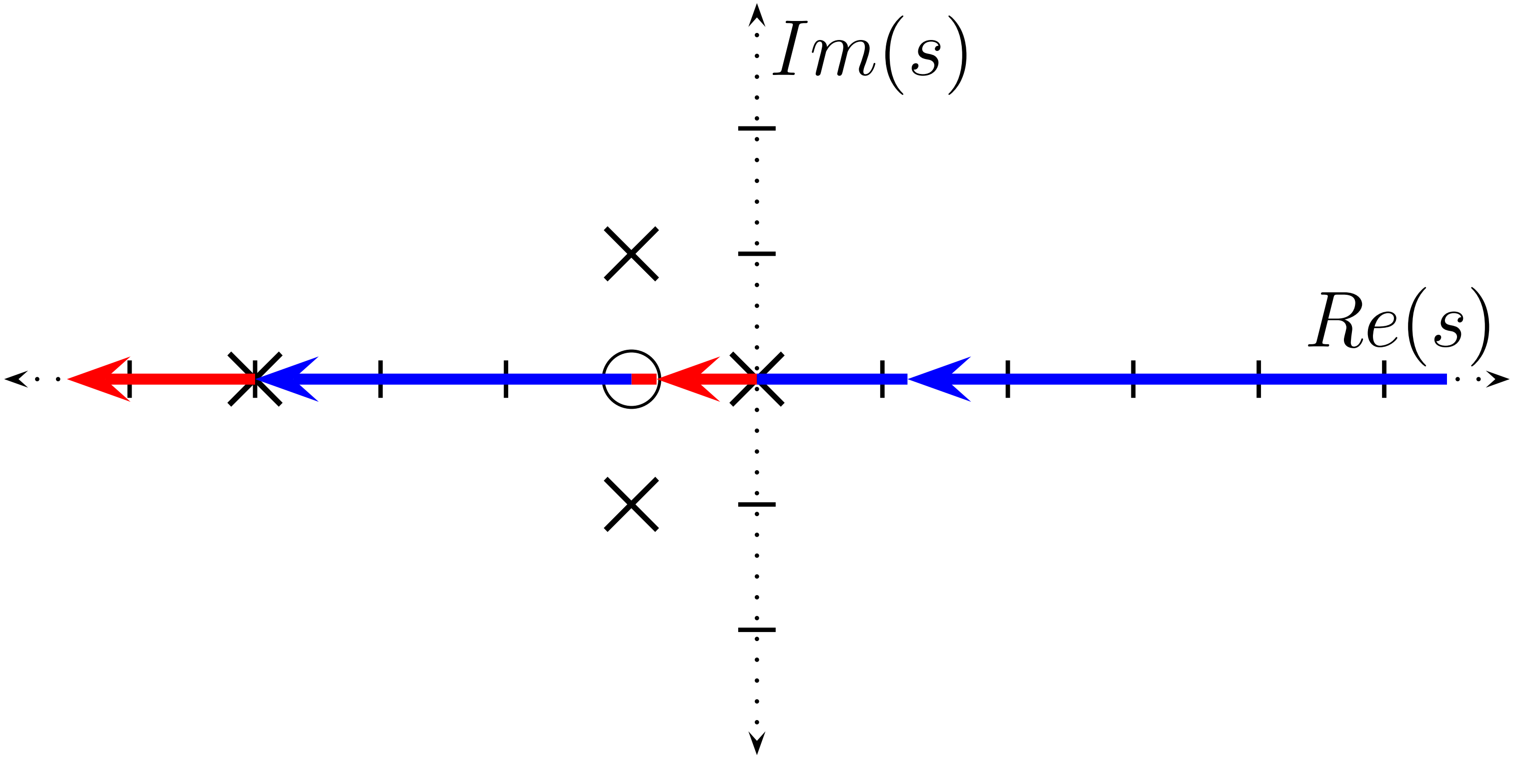


Figura 8: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo. Paso 3

Ejemplo

Usar R_6 y R_7 para trazar las asíntotas

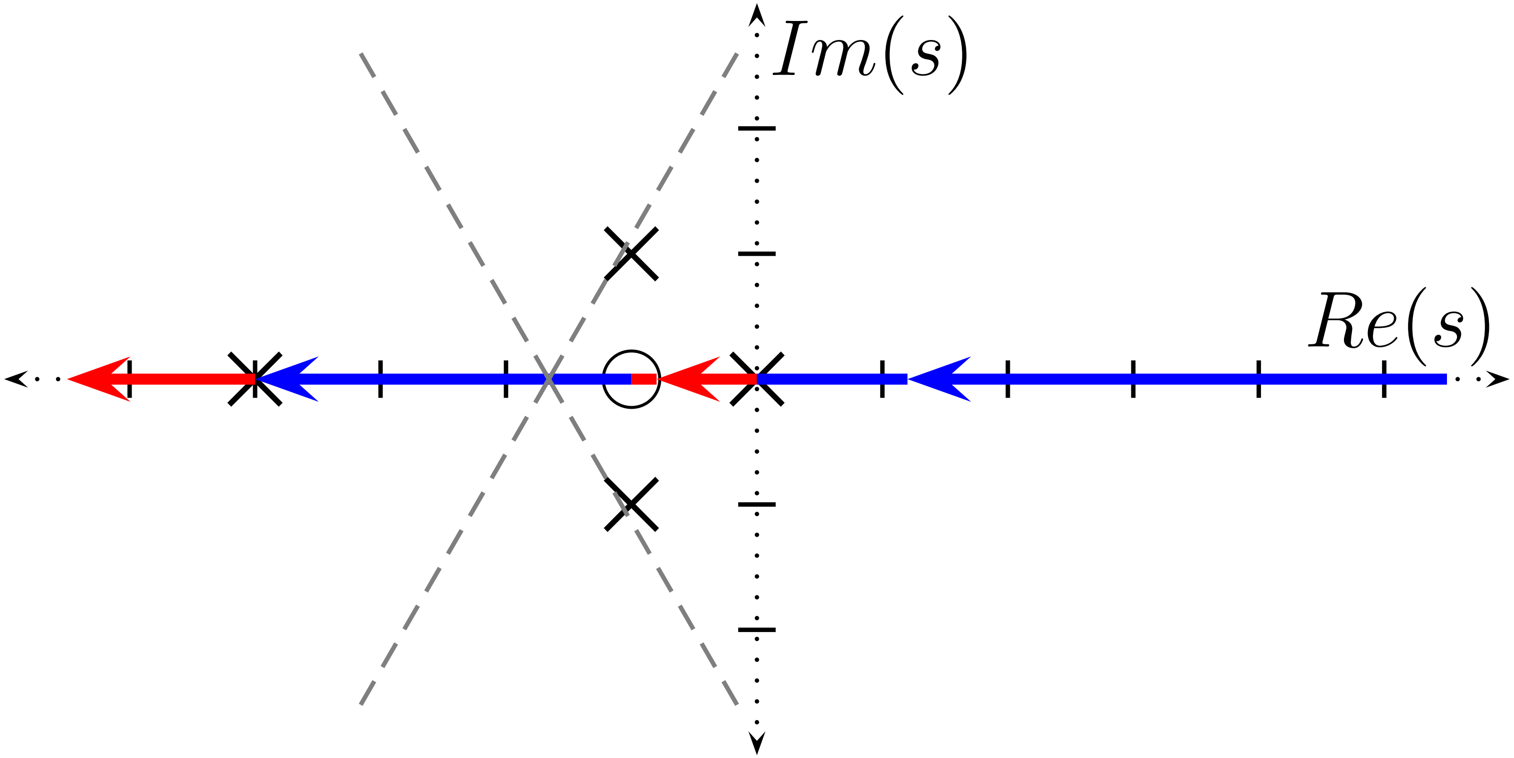


Figura 9: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo. Paso 4

Ejemplo

Usar R_5, R_2 y R_3 para hallar ramas hacia y desde ∞

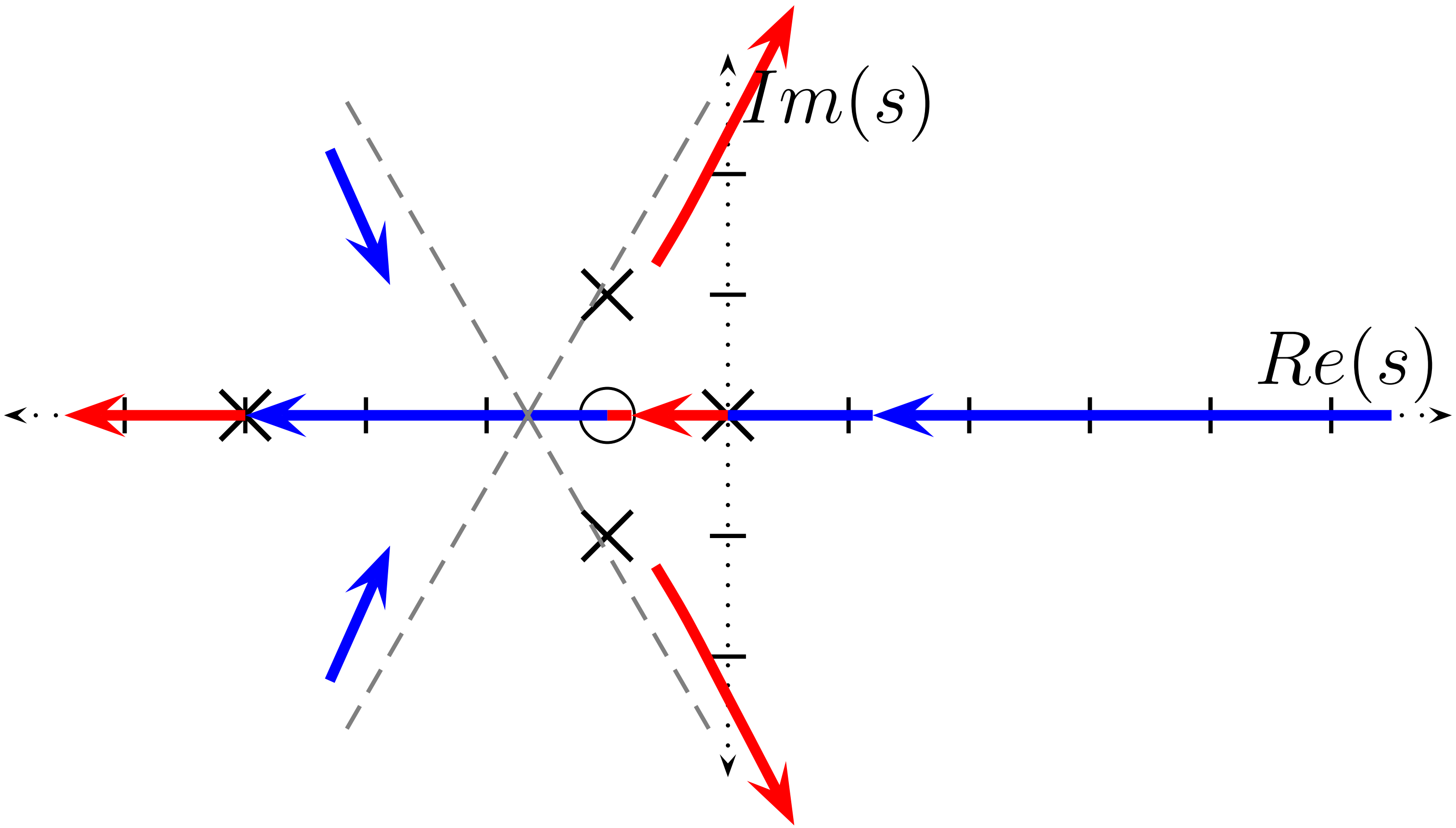


Figura 10: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo. Paso 5

Ejemplo

Completar en forma aproximada o con cálculos

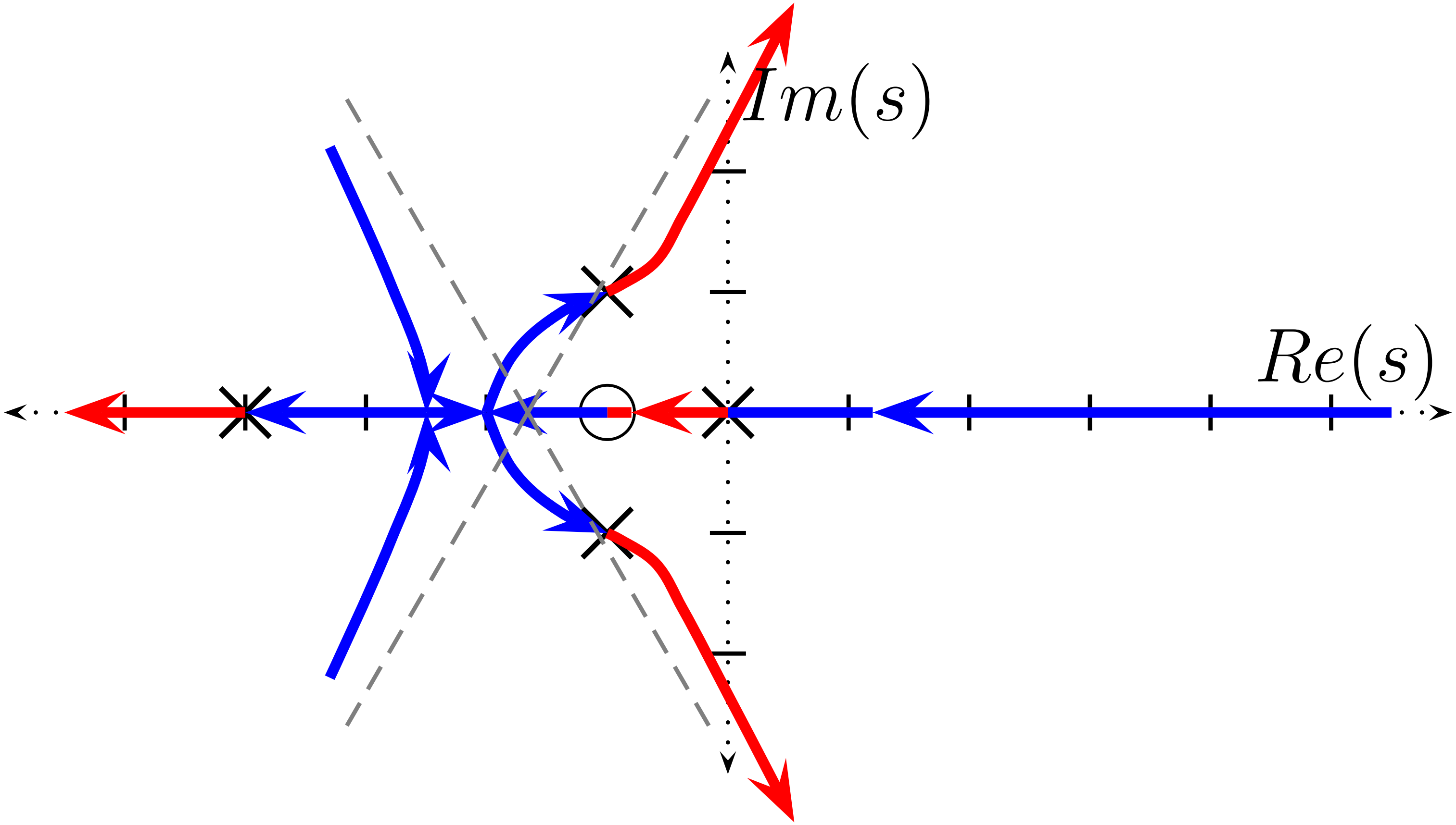


Figura 11: Root-locus y Root-locus complementario de un ejemplo. Diagramas completos