

Sistemas Realimentados Simples

Estabilidad de Sistemas Contínuos

Criterio de Routh-Hurwitz

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Sistema Continuo

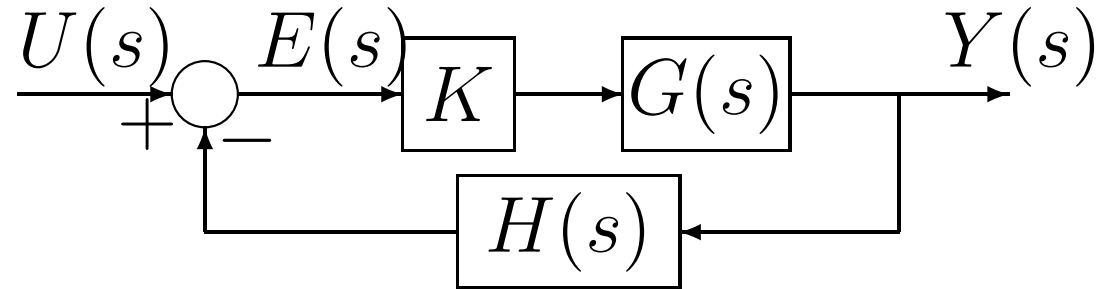


Figura 1: Sistema continuo retroalimentado simple

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

¿ $F(s)$ es estable?, es decir, ¿su denominador tiene todas las raíces en el semiplano izquierdo?

Raíces de polinomios

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

¿Cómo determinar si las raíces del polinomio están ubicadas todas en el semiplano izquierdo?

Resaltamos:

- Si $p(s)$ tiene coeficientes de signos diferentes, o coeficientes cero, entonces tiene al menos una raíz en el semiplano derecho o en el eje imaginario.
- Si $p(s)$ tiene todos sus coeficientes del mismo signo, no podemos extraer conclusiones a priori sobre la ubicación de sus raíces

Raíces de polinomios

Demostración: supóngase primero que $p(s)$ tiene sólo raíces reales:

$$p(s) = G(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_n)$$

Si las raíces α_i son todas negativas, los términos $-\alpha_i$ serán todos positivos, y en general el producto $(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_n)$ tendrá todos los coeficientes positivos. De esta forma, los coeficientes de $p(s)$ serán todos positivos o todos negativos, dependiendo del signo de G

Raices de polinomios

Supóngase que $p(s)$ tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$p(s) = G(s - (\delta + j\omega))(s - (\delta - j\omega))(s - \alpha_3) \cdots (s - \alpha_n)$$

El producto de los términos que tienen que ver con las raíces complejas es:

$$(s - (\delta + j\omega))(s - (\delta - j\omega)) = s^2 - 2\delta s + (\delta^2 + \omega^2)$$

Si $\delta < 0$, es decir si las raíces están en el semiplano izquierdo, $p(s)$ tendrá sólo coeficientes positivos, y por tanto $p(s)$ tendrá todos sus coeficientes del mismo signo (positivos si G es positiva y negativos si G es negativa).

Raices de polinomios

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Como consecuencia de lo anterior, si $p(s)$ tiene coeficientes de signos diferentes, o cero, podemos asegurar que tiene una o más raíces en el semipano derecho o en el eje imaginario. Si todos los coeficientes iguales, es necesario realizar otro tipo de pruebas antes de establecer la ubicación de sus raíces. Una de esas pruebas se conoce como la prueba de *Routh-Hurwitz*, para lo cual es necesario primero construir un arreglo específico con los coeficientes de $p(s)$

Arreglo de Routh

Dado un polinomio $p(s)$

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Es posible construir el *Arreglo de Routh* de $p(s)$ a partir de los coeficientes a_i . Se llenan las dos primeras líneas

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ s^{n-2} & & & & \\ \vdots & & & & \\ s^1 & & & & \\ s^0 & & & & \end{array}$$

Arreglo de Routh

- Cada nueva línea se construye con información de las dos líneas inmediatamente anteriores.

$$\begin{array}{c|cccc} \vdots & & & & \\ s^{i+2} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ s^{i+1} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ s^i & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Figura 2: Arreglo de Routh. Dos líneas genéricas

Arreglo de Routh

$$\begin{array}{c|cccc} \vdots & & & & \\ s^{i+2} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ s^{i+1} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ s^i & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

- el término j -ésimo de una línea (c_j) se calcula:

$$c_j = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_{j+1} \\ b_1 & b_{j+1} \end{vmatrix}}{b_1}$$

Arreglo de Routh

Ejemplo: $p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 16 \\ s^4 & 1 & 9 & 10 \\ s^3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ s^2 & d_1 & d_2 & d_3 \\ s^1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ s^0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array}$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{1} = -6 \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{1} = 6$$

Arreglo de Routh

Ejemplo: $p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 16 \\ s^4 & 1 & 9 & 10 \\ s^3 & -6 & 6 & \\ s^2 & d_1 & d_2 & \\ s^1 & e_1 & e_2 & \\ s^0 & f_1 & f_2 & \end{array}$$

$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}}{-6} = 10$$

$$d_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = 10$$

Arreglo de Routh

Ejemplo: $p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 16 \\ s^4 & 1 & 9 & 10 \\ s^3 & -6 & 6 & \\ s^2 & 10 & 10 & \\ s^1 & e_1 & & \\ s^0 & f_1 & & \end{array}$$

$$e_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}}{10} = 12$$

$$f_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}}{12} = 10$$

Arreglo de Routh

Ejemplo: $p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 16 \\ s^4 & 1 & 9 & 10 \\ s^3 & -6 & 6 & \\ s^2 & 10 & 10 & \\ s^1 & 12 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

Arreglo de Routh

Algunos aspectos de la construcción del arreglo

- El número de filas del arreglo disminuye progresivamente: cada dos filas se disminuye una columna.
- El término que está en la última columna justo antes de desaparecer es siempre el mismo (es 10 en el ejemplo), debido a que éste se calculará siempre como

$$-\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}}{c} = b$$

Criterio de Routh-Hurwitz

Dado un polinomio $p(s)$

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

El número de raíces de $p(s)$ en el semiplano derecho es igual al número de cambios de signo que se suceden en la primera columna del arreglo de Routh de dicho polinomio

Criterio de Roth-Hurwitz

Ejemplo: $p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10$

s^5		1	3	16
s^4		1	9	10
s^3		-6	6	
s^2		10	10	
s^1		12		
s^0		10		

$p(s)$ tiene dos raíces en el semiplano derecho, ya que su arreglo de Roth-Hurwitz tiene dos cambios de signo en la primera columna: uno al pasar de 1 a -6, y otro al pasar de -6 a 10.

Estabilidad

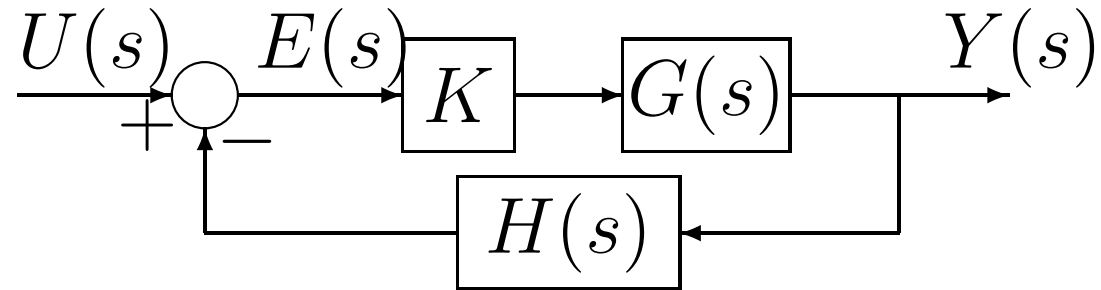


Figura 3: Sistema continuo retroalimentado simple

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Los polos de $F(s)$ dependen de K . ¿Para qué valores de K el sistema realimentado es estable?. Empleamos el criterio de Routh-Hurwitz.

Estabilidad por Routh-Hurwitz

Ejemplo:

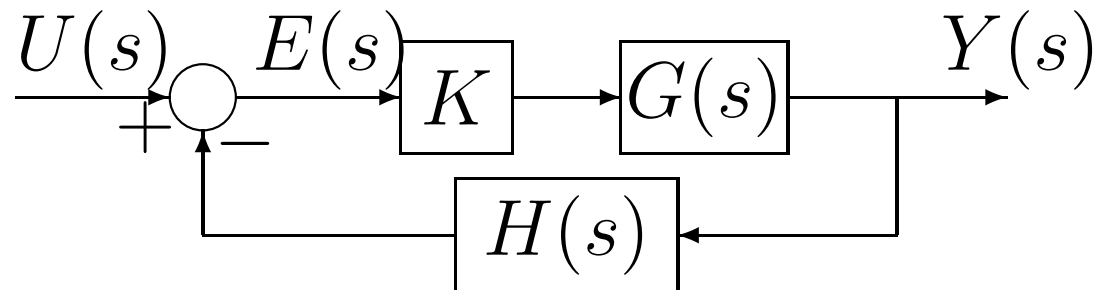


Figura 4: Sistema continuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{s + 2} \quad H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{k(s + 1)}{s^2 + 3s + (k + 2)}$$

Estabilidad por Routh-Hurwitz

$$F(s) = \frac{k(s + 1)}{s^2 + 3s + (k + 2)}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k + 2 \\ s^1 & 3 & \\ s^0 & k + 2 & \end{array}$$

Para que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo, y por lo tanto el sistema sea estable, los signos de la primera columna deben ser iguales:

$$k + 2 > 0 \quad k > -2$$

Cuando $k = -2$: *Estabilidad Marginal.*

Estabilidad por Routh-Hurwitz

Ejemplo:

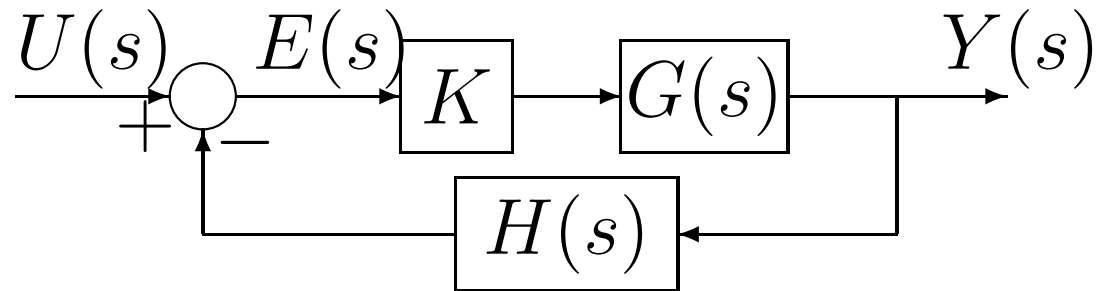


Figura 5: Sistema continuo retroalimentado simple

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad H(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{k(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6+k)}$$

Estabilidad por Routh-Hurwitz

$$F(s) = \frac{k(s + 3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + k)}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6 + k \\ s^1 & \frac{60-k}{6} & \\ s^0 & 6 + k & \end{array}$$

Para asegura estabilidad:

$$(60 - k) > 0 \quad \text{y} \quad (6 + k) > 0$$
$$k \in (-6, 60)$$

Cuando $k = -6$ o $k = 60$: *Estabilidad Marginal.*

Estabilidad por Routh-Hurwitz

Ejemplo:

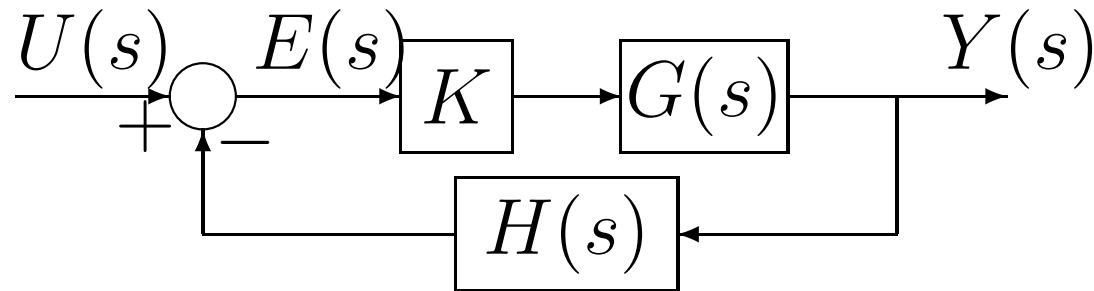


Figura 6: Sistema continuo retroalimentado simple

Supóngase que existe un sistema dinámico continuo cuya función de transferencia tiene el siguiente denominador

$$D_F(s) = s^3 + 3ks^2 + (k + 2)s + 4$$

Estabilidad por Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & k + 2 \\ s^2 & 3k & 4 \\ s^1 & \frac{3k^2 + 6k - 4}{3k} & \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

Para que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo, y por lo tanto el sistema sea estable, los signos de la primera columna deben ser iguales:

$$\begin{cases} 3k > 0 \\ \frac{3k^2 + 6k - 4}{3k} > 0 \end{cases}$$

Estabilidad por Routh-Hurwitz

$$\begin{cases} 3k > 0 \\ \frac{3k^2 + 6k - 4}{3k} > 0 \end{cases}$$

La segunda condición podría darse si tanto numerador como denominador son del mismo signo; no pueden ser negativos por la primera condición.

$$\begin{cases} k > 0 \\ 3k^2 + 6k - 4 > 0 \end{cases}$$

La segunda condición se cumple si $k < -2,52$ o $k > 0,52$, pero k debe ser positivo. Por lo tanto, aseguramos que el sistema sea estable si y sólo si $k > 0,52$

Problemas en el arreglo

$$\begin{array}{c} \vdots \\ s^{i+2} \\ s^{i+1} \\ s^i \\ \vdots \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \end{array} \right.$$

$$c_j = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_{j+1} \\ b_1 & b_{j+1} \end{vmatrix}}{b_1}$$

¿qué pasa si $b_1 = 0$?

Ceros en la primera columna

Ejemplo

$$p(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$$

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 & 3 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Se reemplaza 0 por ε , se completa el arreglo, y luego analizar el límite cuando ε tiende a cero por la derecha.

Ceros en la primera columna

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & \varepsilon & 3 & \\ s^1 & 2 - \frac{3}{\varepsilon} & & \\ s^0 & 3 & & \end{array}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ resultan dos raíces en el SPD:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0^+ & 3 & \\ s^1 & -\infty & & \\ s^0 & 3 & & \end{array}$$

Terminación prematura

Una dificultad mayor surge cuando todos los términos de una fila se hacen cero. Este hecho se conoce como la *terminación prematura del arreglo*, y está relacionada con polinomios con raíces ubicadas en forma simétrica respecto al origen, como por ejemplo cuando existen raíces en el eje imaginario. Ejemplo:

$$p(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4$$

$$p(s) = (s + 1)(s^4 + 5s^2 + 4)$$

$$p(s) = (s + 1)(s^2 + 1)(s^2 + 4)$$

Terminación prematura

Ejemplo:

$$p(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4$$

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 5 & 4 \\ s^4 & 1 & 5 & 4 \\ s^3 & 0 & 0 & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Terminación prematura

Se escribe el polinomio $\hat{p}(s)$ que se obtiene de la fila inmediatamente superior a la de quedó con ceros:

$$\hat{p}(s) = s^4 + 5s^2 + 4$$

Este polinomio resulta ser un divisor exacto de $p(s)$. El arreglo de Routh lo continuamos remplazando la fila de ceros por los coeficientes de la derivada de $\hat{p}(s)$:

$$\frac{d\hat{p}(s)}{ds} = 4s^3 + 10s$$

Terminación prematura

El arreglo resulta ser:

s^5	1	5	4
s^4	1	5	4
<hr/>			
s^3	4	10	
s^2	2,5	4	
s^1	3,6		
s^0	4		

Por lo tanto $p(s)$ no tiene ceros en el SPD