Introducción al Análisis de Sistemas Dinámicos Lineales

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Función de Transferencia

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Un sistema lineal

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{Sistema}} \longrightarrow y(t)$$

Figura 1: Sistema Dinámico Continuo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)$$

Al aplicar T. Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)\right\}$$

Al aplicar T. Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left\{y^{(i)}(t)\right\} = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left\{u^{(i)}(t)\right\}$$

Al aplicar T. Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left\{y^{(i)}(t)\right\} = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left\{u^{(i)}(t)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} b_i \left(s^i U(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)$$

Despejando $Y(s)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i U(s) +$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+) \right)$$

$$- \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+) \right)$$

Despejando $Y(s)$

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] U(s) +$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

Despejando $Y(s)$

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] U(s) +$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

- Respuesta de Estado Cero
- Respuesta de Entrada Cero

Caso discreto

$$Y(z) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}\right] U(z) +$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} y(k) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} u(k)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}$$

- Respuesta de Estado Cero
- Respuesta de Entrada Cero

Función de Transferencia

Relación en el dominio de la frecuencia Compleja entre Salida y Entrada con condiciones iniciales nulas

$$F(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{C.I.=0} \qquad F(z) = \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{C.I.=0}$$

Función de Transferencia

Sólo existe la respuesta de estado cero

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i} \qquad F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}$$

Función de Transferencia

Sólo existe la respuesta de estado cero

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i} \qquad F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}$$

Si $C.I. = 0$

$$Y(s) = F(s)U(s) \qquad Y(z) = F(z)U(z)$$

Diagramas de Bloque

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Bloque Mínimo

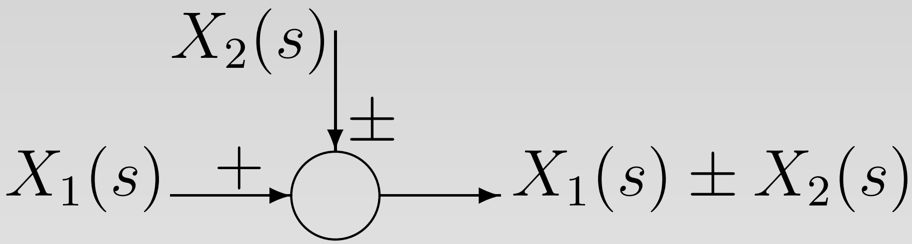
$$U(s) \longrightarrow \boxed{F(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad U(z) \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow Y(z)$$

Figura 1: Diagrama de bloques mínimo

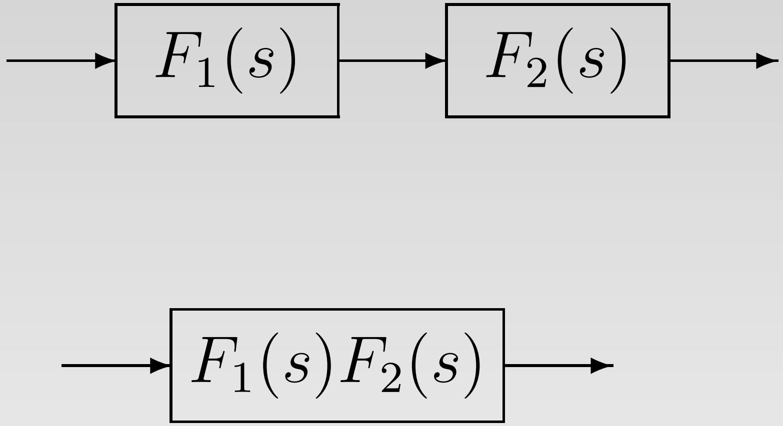
Si $C.I. = 0$

$$Y(s) = F(s)U(s) \qquad Y(z) = F(z)U(z)$$

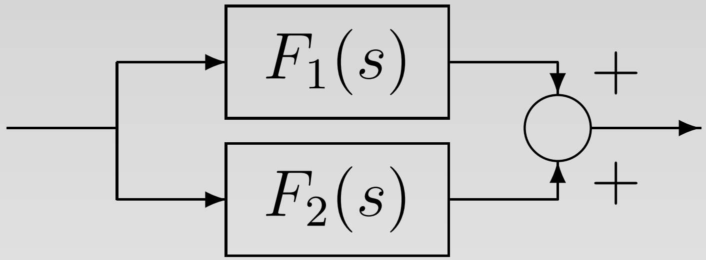
Sumador

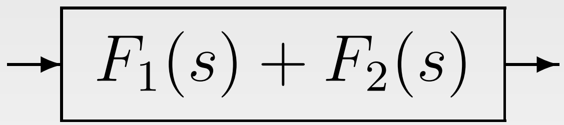


Cascada

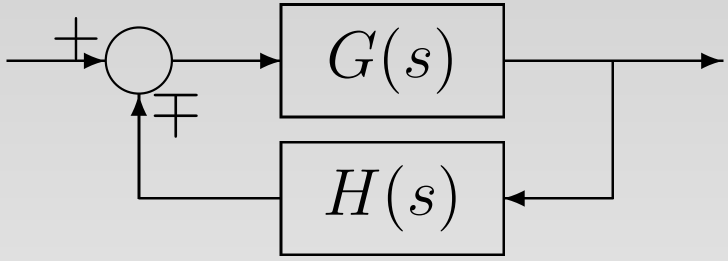


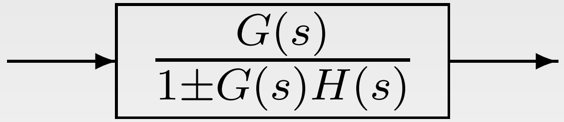
Paralelo



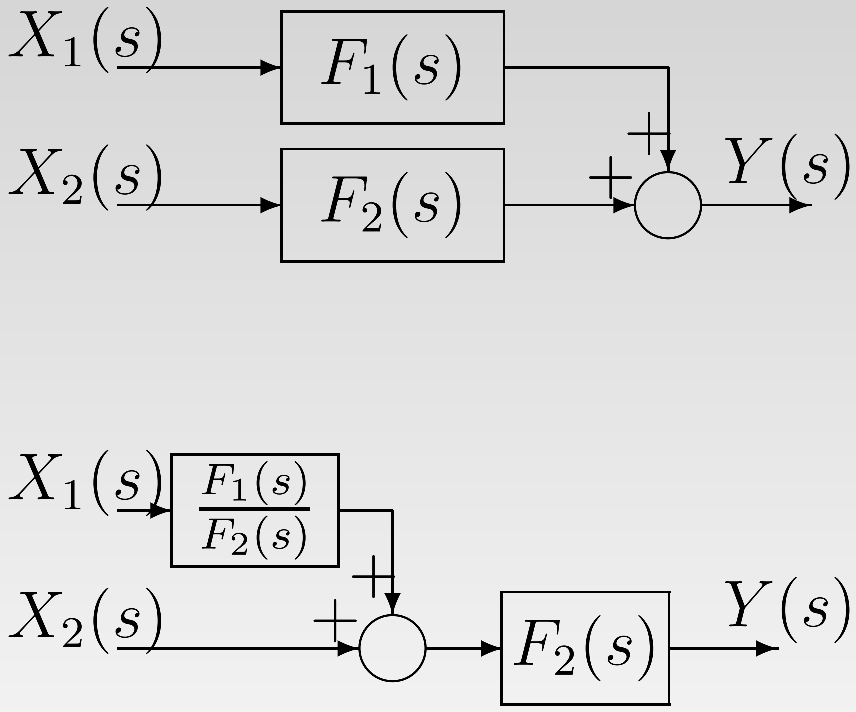


Retroalimentación

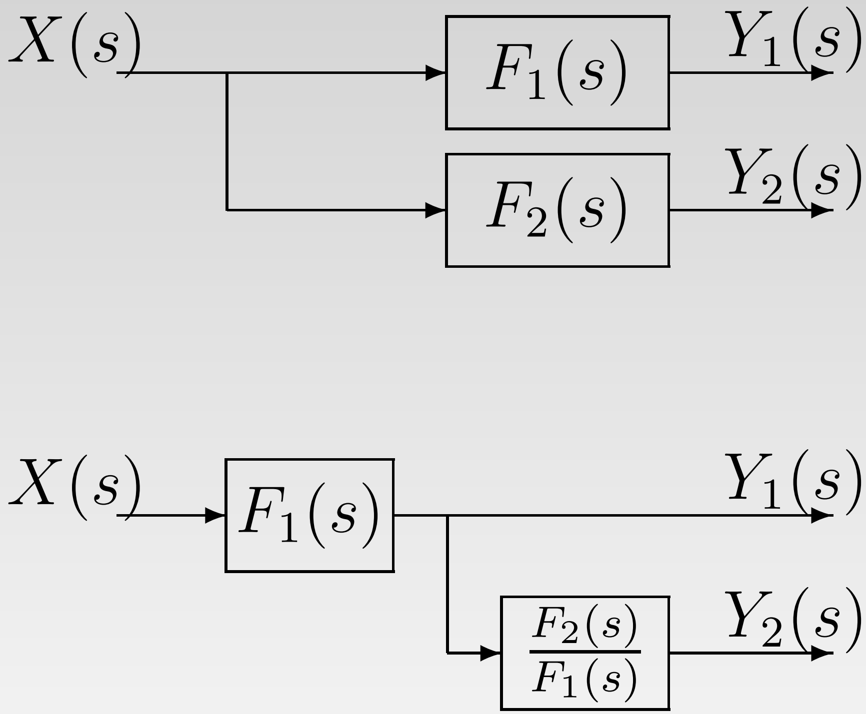




Traslado de Sumador



Traslado del punto de salida



Ejemplo

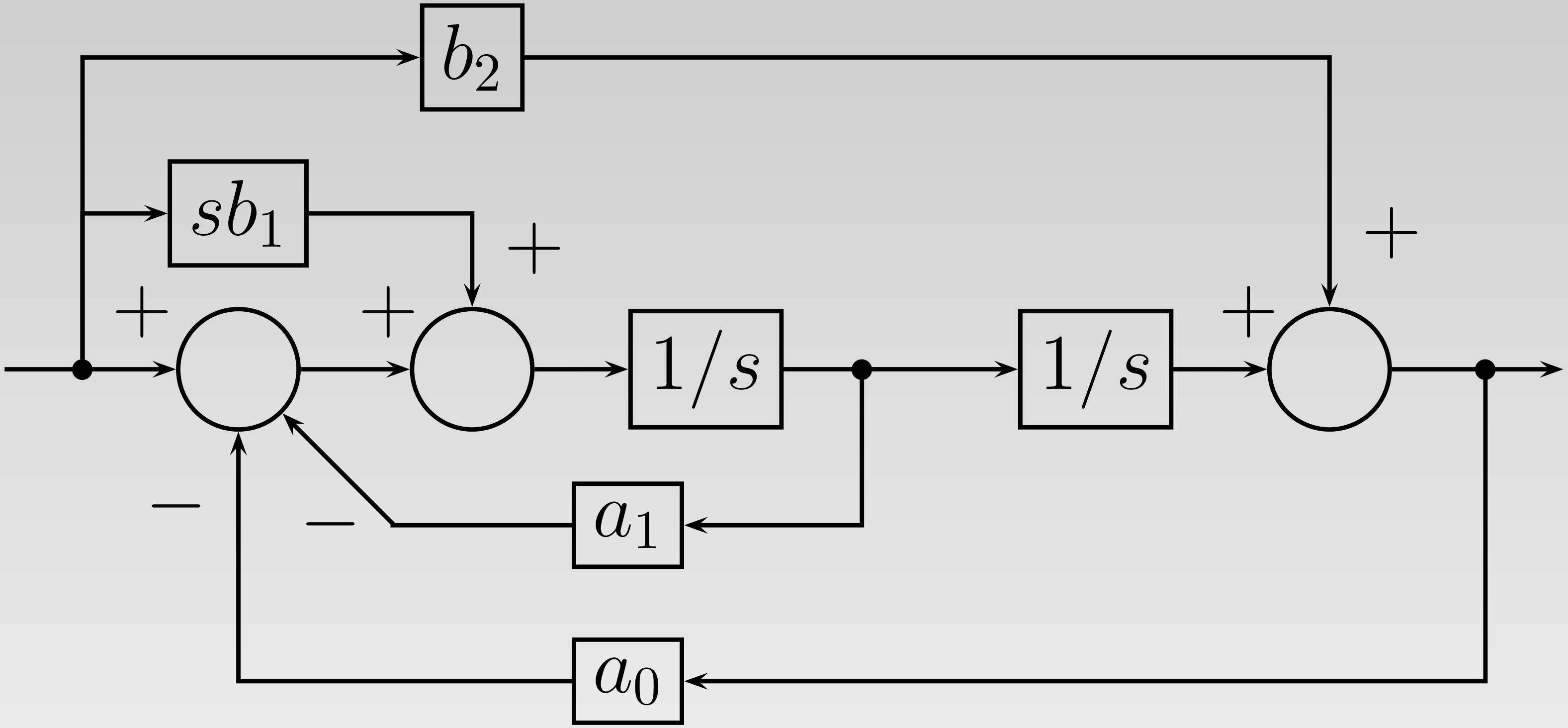


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 1

Ejemplo

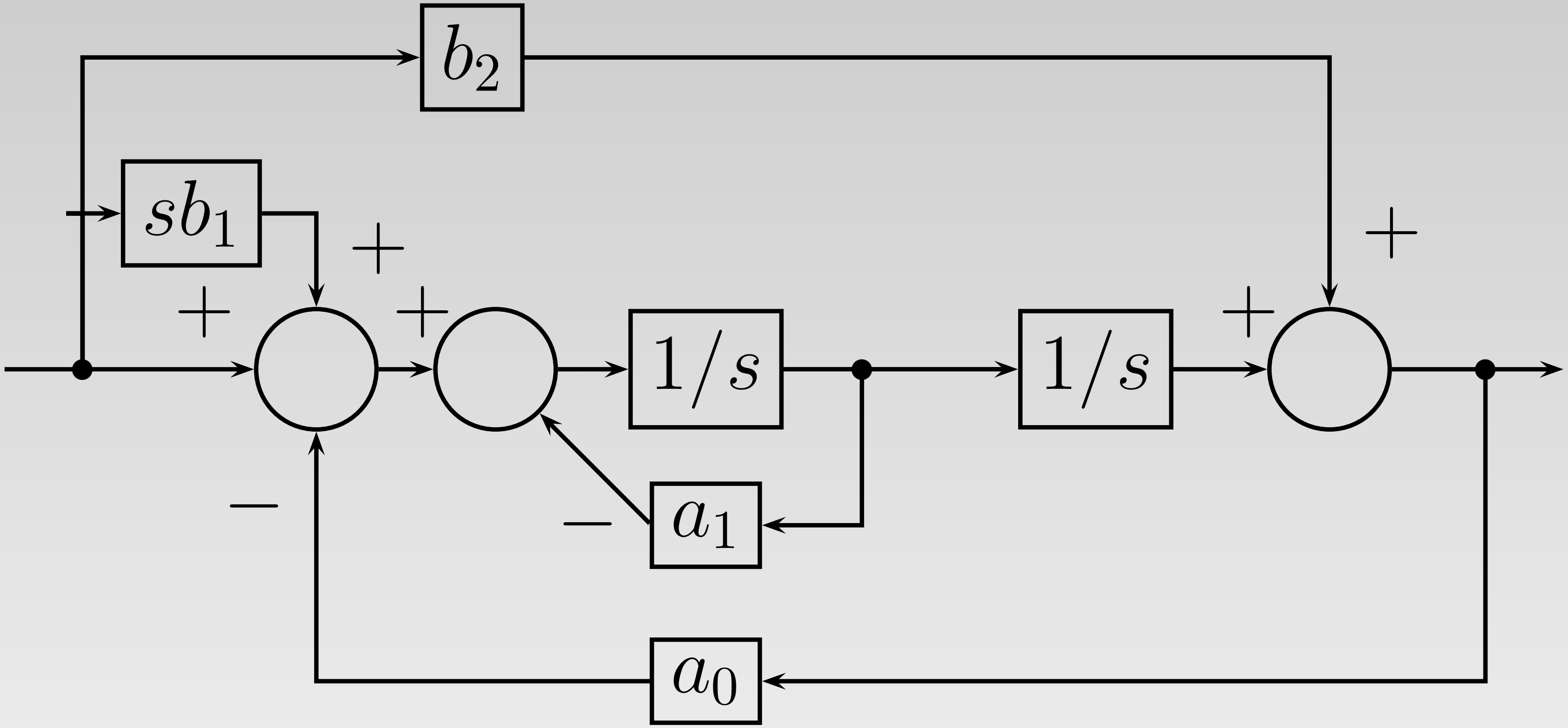


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 2

Ejemplo

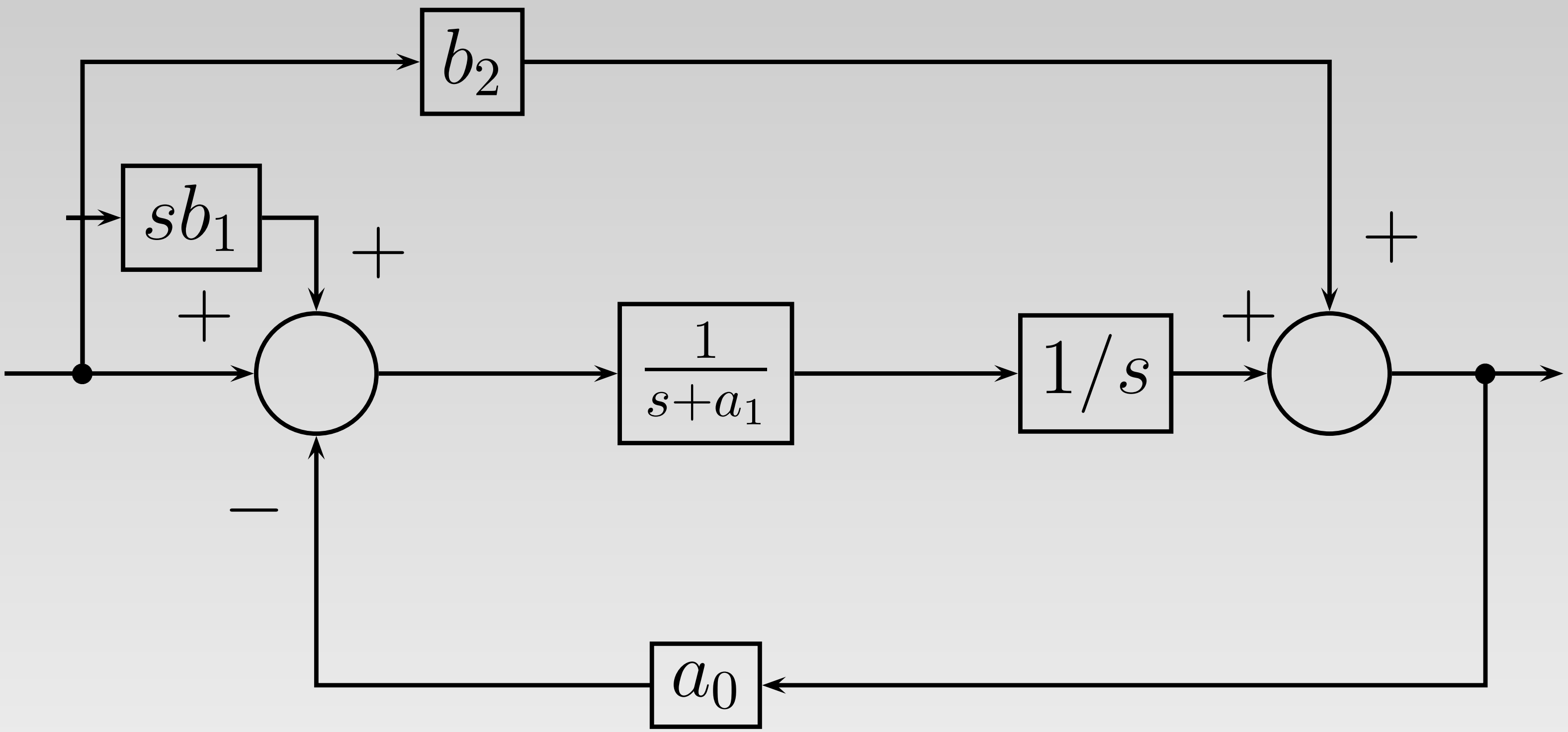


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 3

Ejemplo

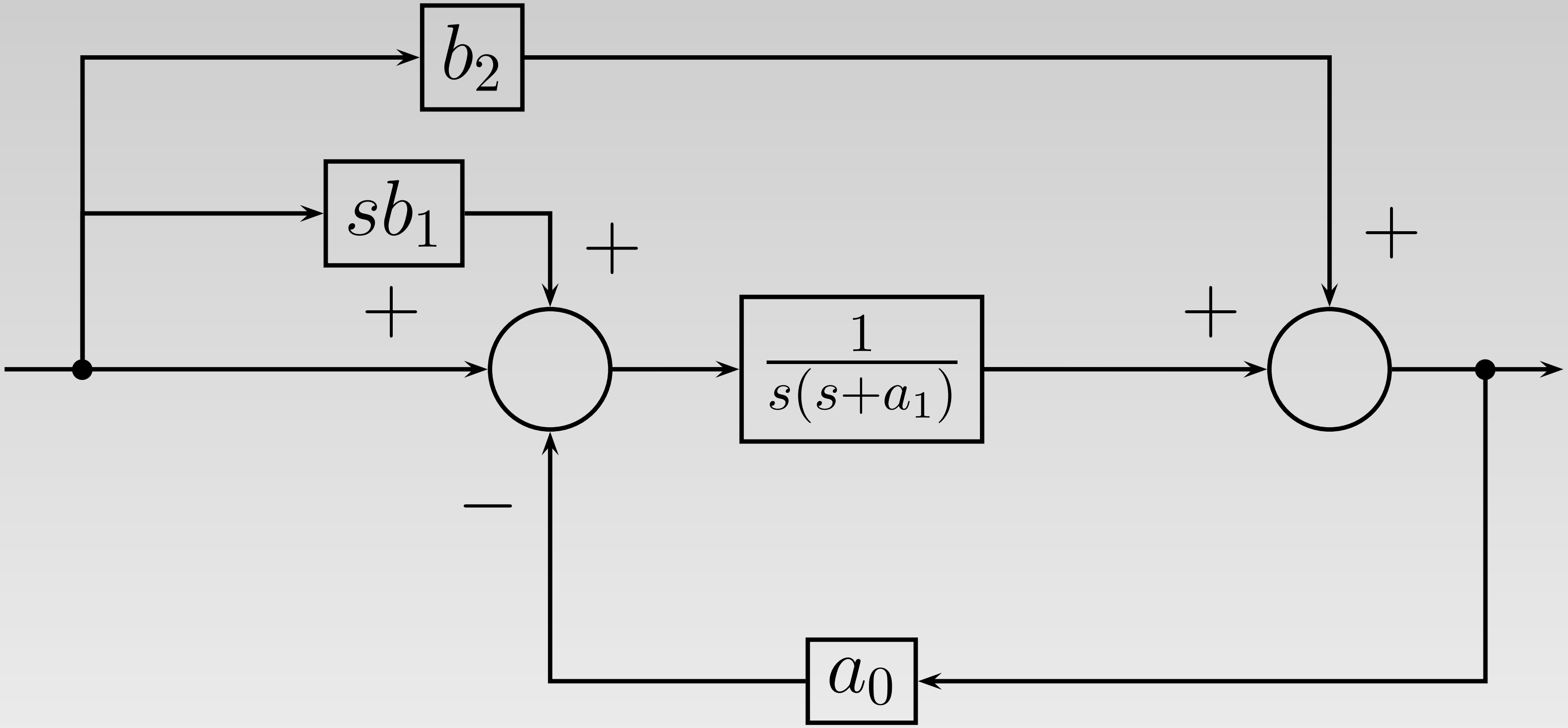


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 4

Ejemplo

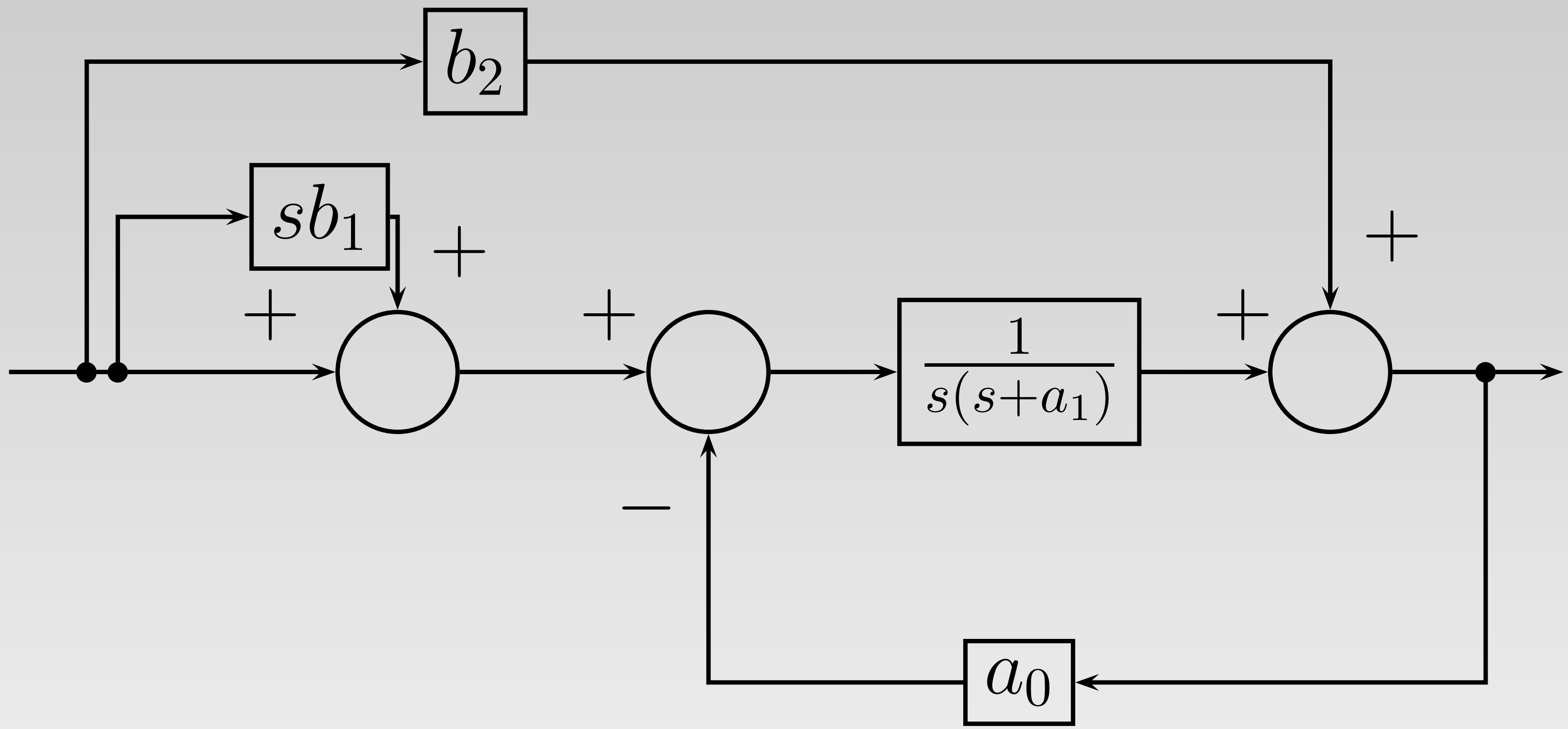


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 5

Ejemplo

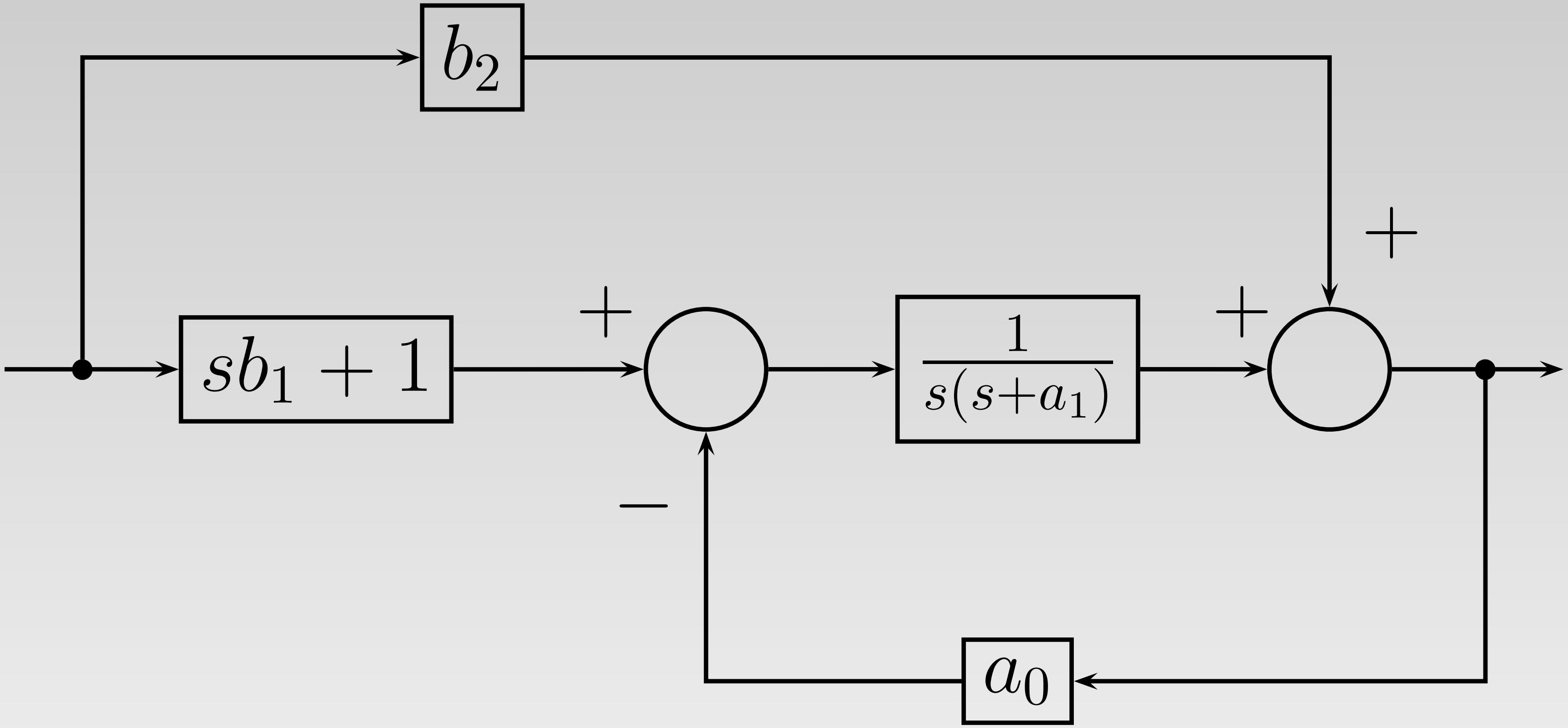


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 6

Ejemplo

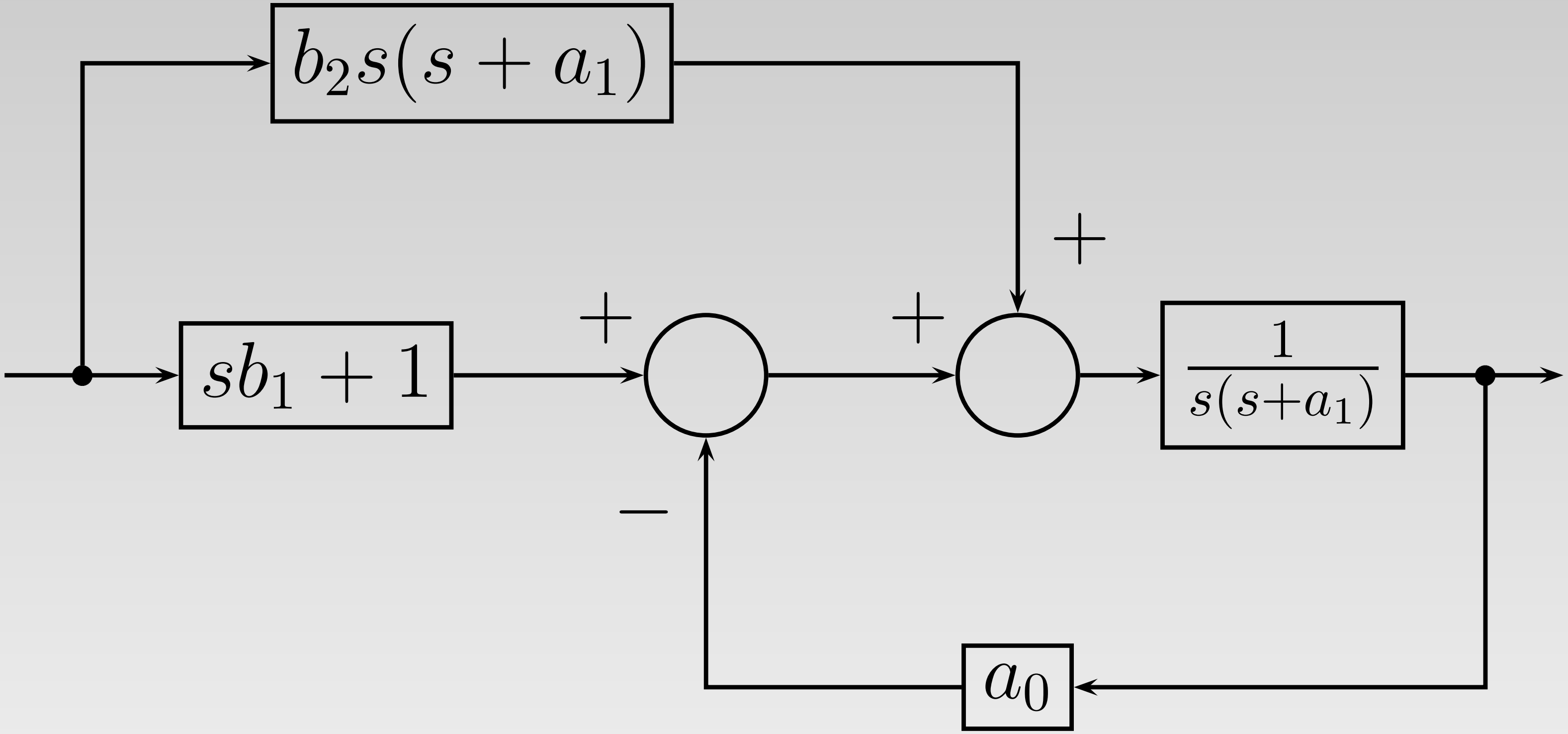


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 7

Ejemplo

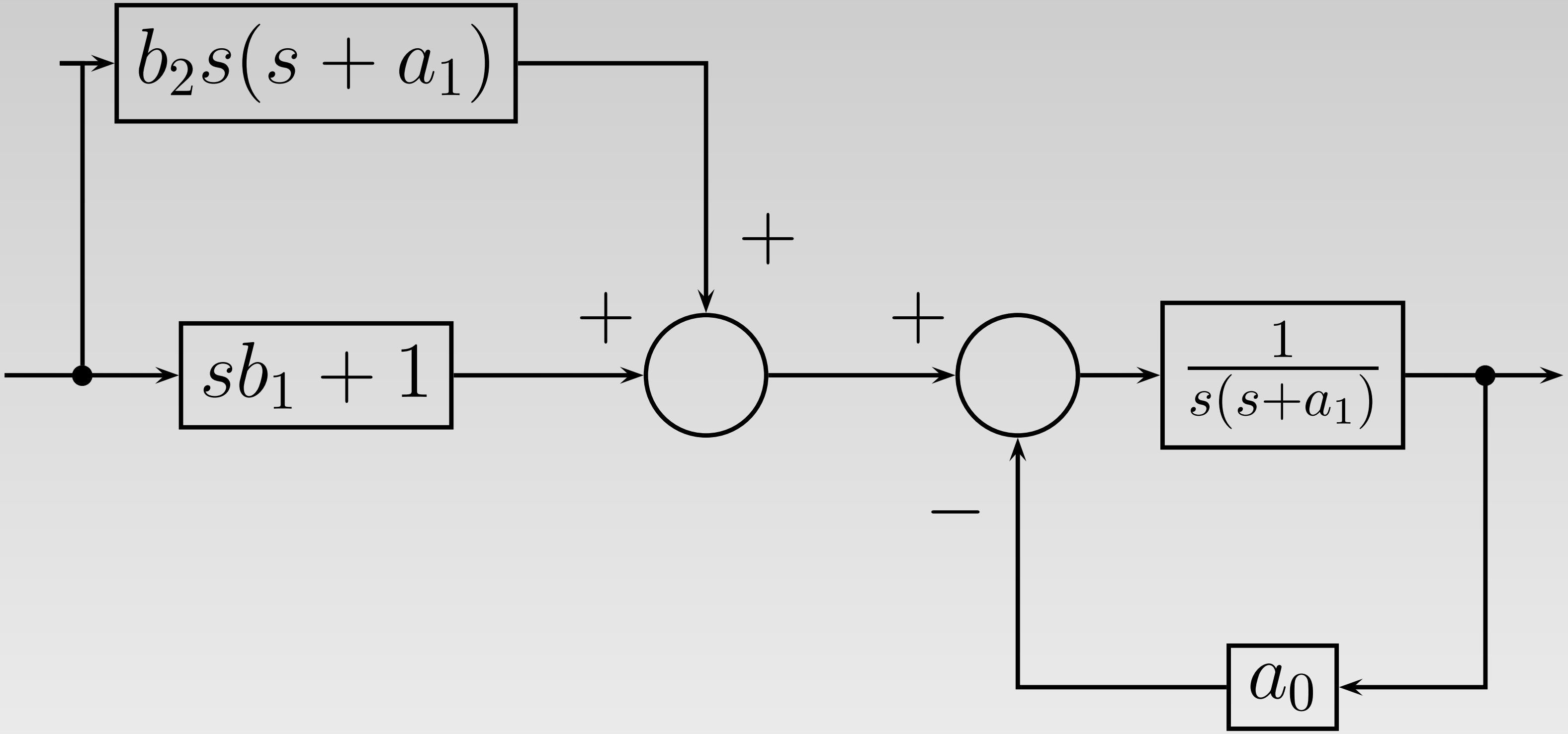


Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 8

Ejemplo

$$\longrightarrow \boxed{b_2 s(s+a_1) + s b_1 + 1} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s(s+a_1)+a_0}} \longrightarrow$$

Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 9

Ejemplo

$$\longrightarrow \boxed{\left(b_2 s(s+a_1) + s b_1 + 1\right)\left(\frac{1}{s(s+a_1)+a_0}\right)} \longrightarrow$$

Figura 2: Diagrama de Bloques del ejemplo **??**. Paso 10

Diagramas de Flujo de Señal

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

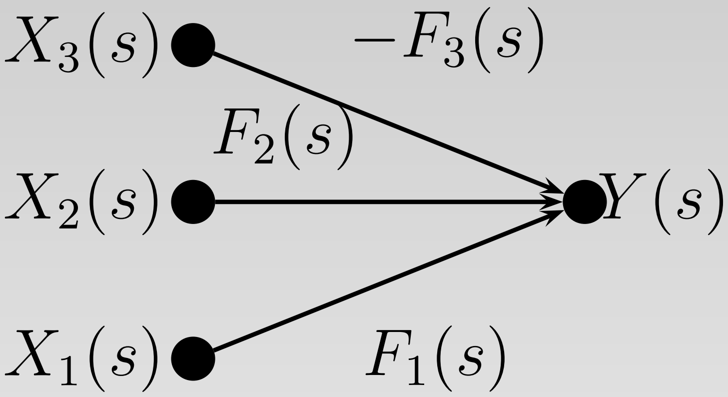
Universidad Nacional de Colombia

Nodos y ramas

$$X(s) \bullet\!\xrightarrow{\quad F(s) \quad}\!\bullet Y(s)$$

$$Y(s) = F(s)X(s)$$

Suma de Señales



$$Y(s) = F_1(s)X_1(s) + F_2(s)X_2(s) - F_3(s)X_3(s)$$

Camino Directo

Conjunto de ramas que llevan de la entrada a la salida, sin repetirse

Camino Directo

Conjunto de ramas que llevan de la entrada a la salida, sin repetirse

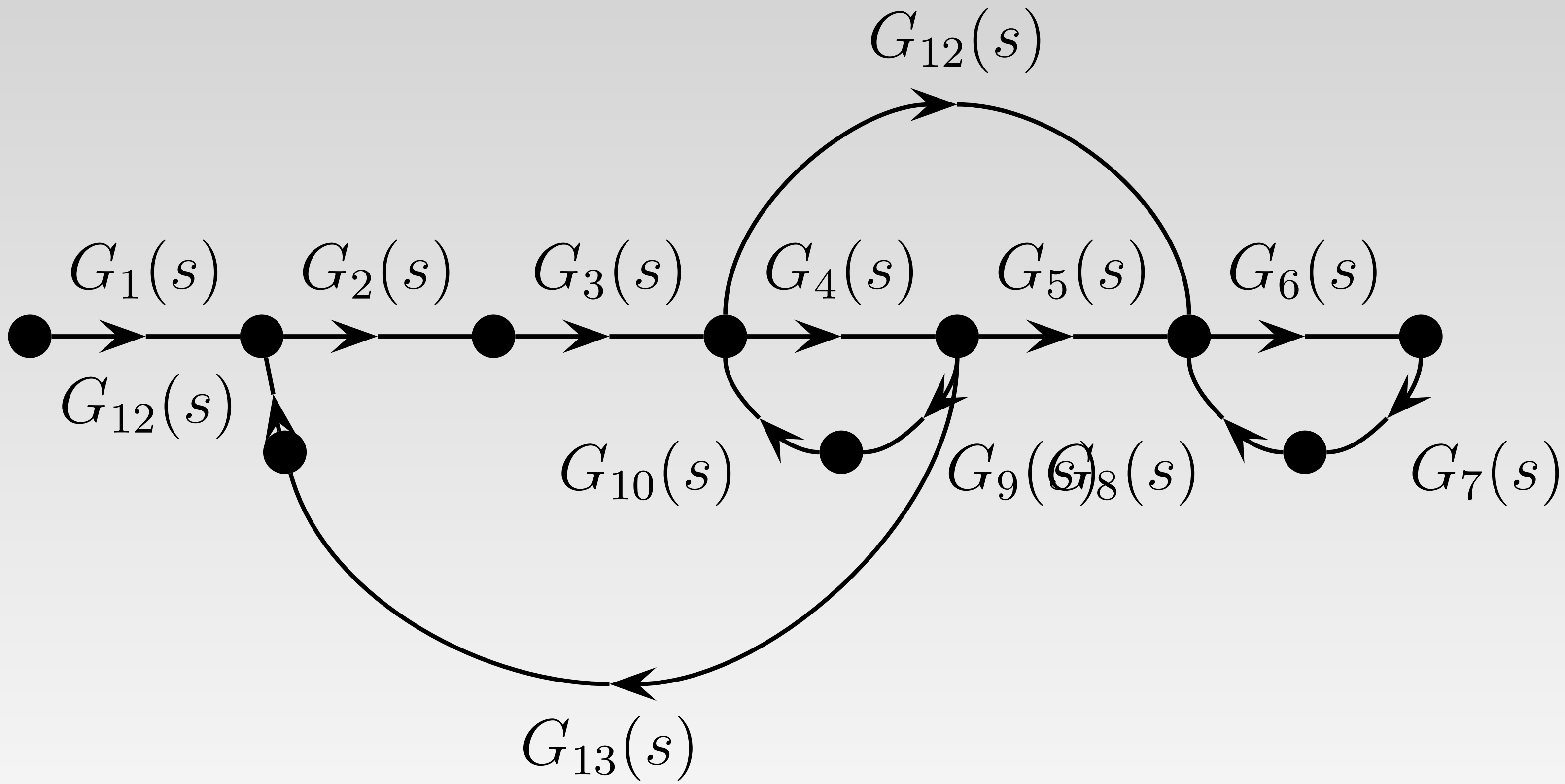


Figura 2: Diagrama de Flujo de Señal del ejemplo **??**

Camino Directo

Conjunto de ramas que llevan de la entrada a la salida, sin repetirse

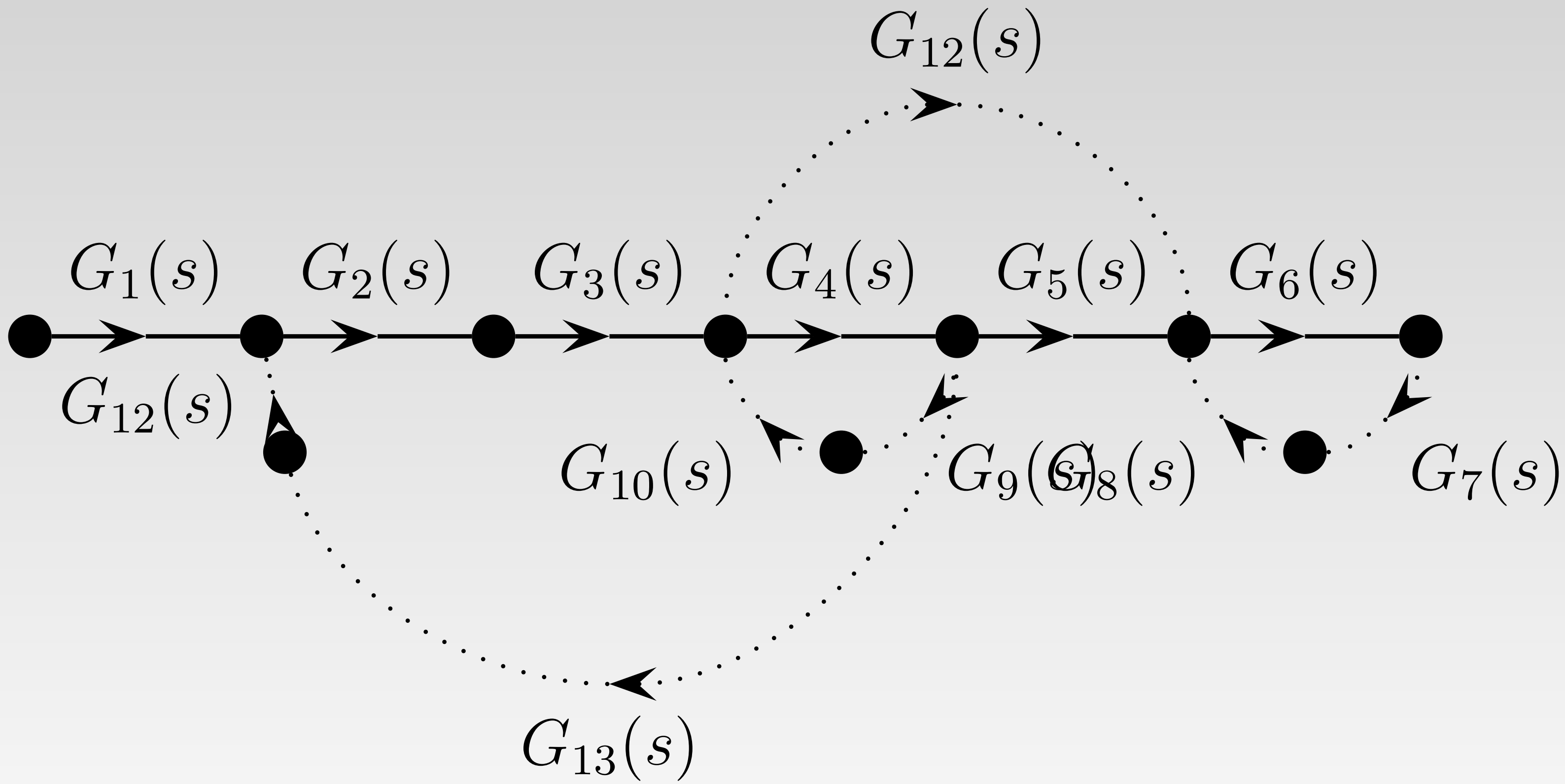


Figura 2: Un camino Directo del ejemplo **??**

Camino Directo

Conjunto de ramas que llevan de la entrada a la salida, sin repetirse

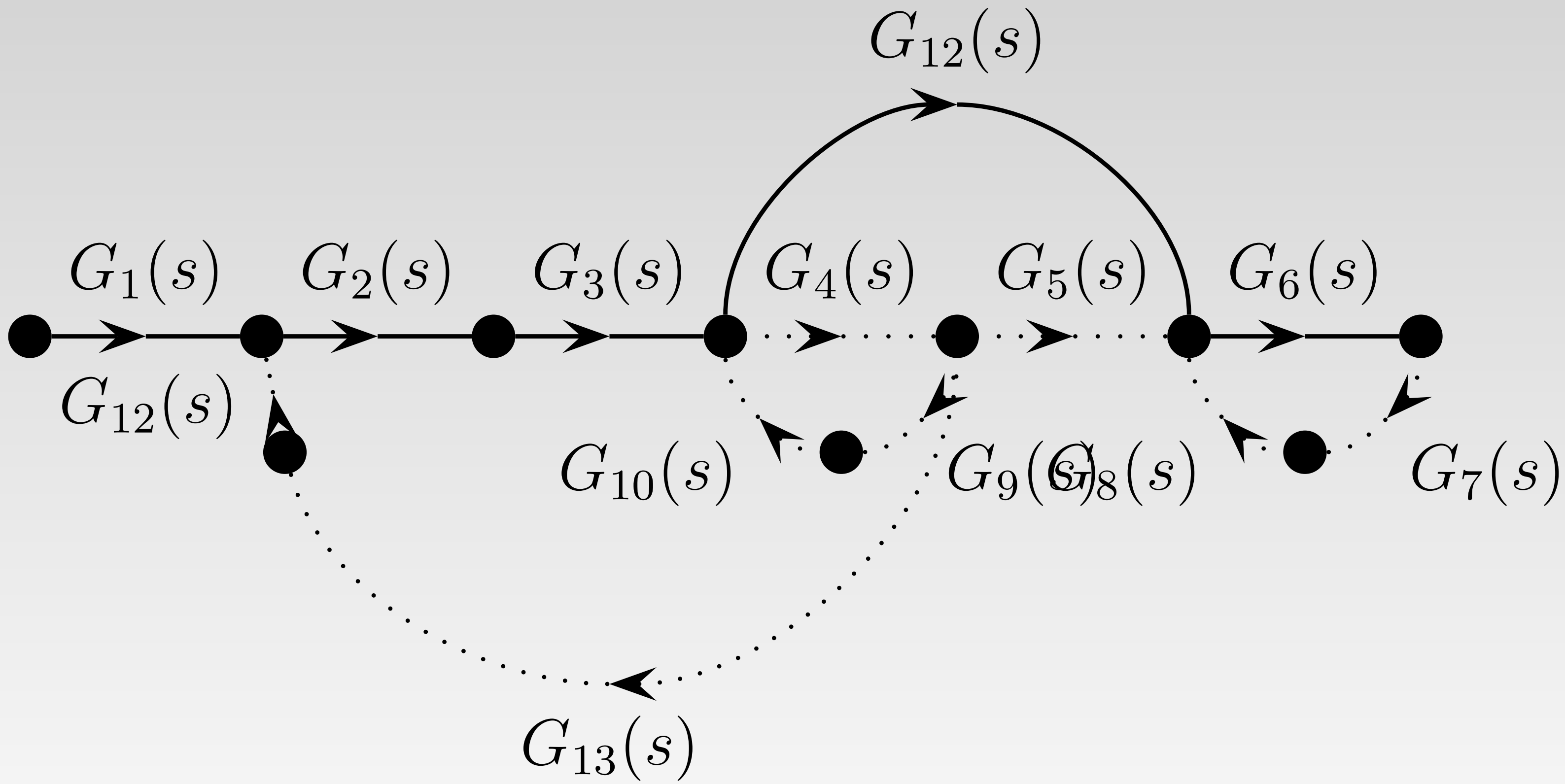


Figura 2: Un camino directo del ejemplo **??**

Ganancia de Camino Directo

Producto de las ganancias del camino directo.

Ganancia de Camino Directo

Producto de las ganancias del camino directo.

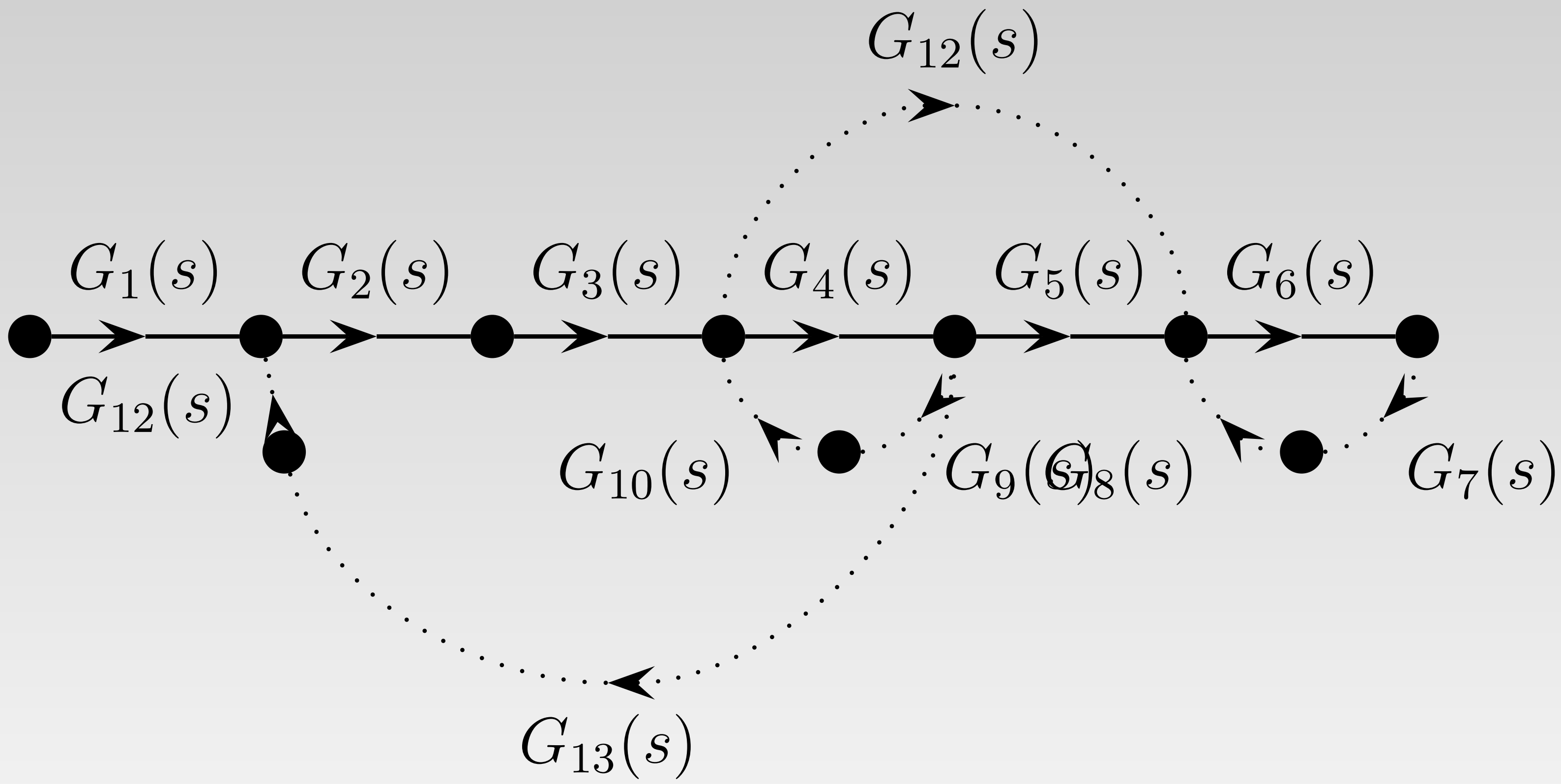


Figura 2: Un camino Directo del ejemplo **??**

$G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)$

Ganancia de Camino Directo

Producto de las ganancias del camino directo.

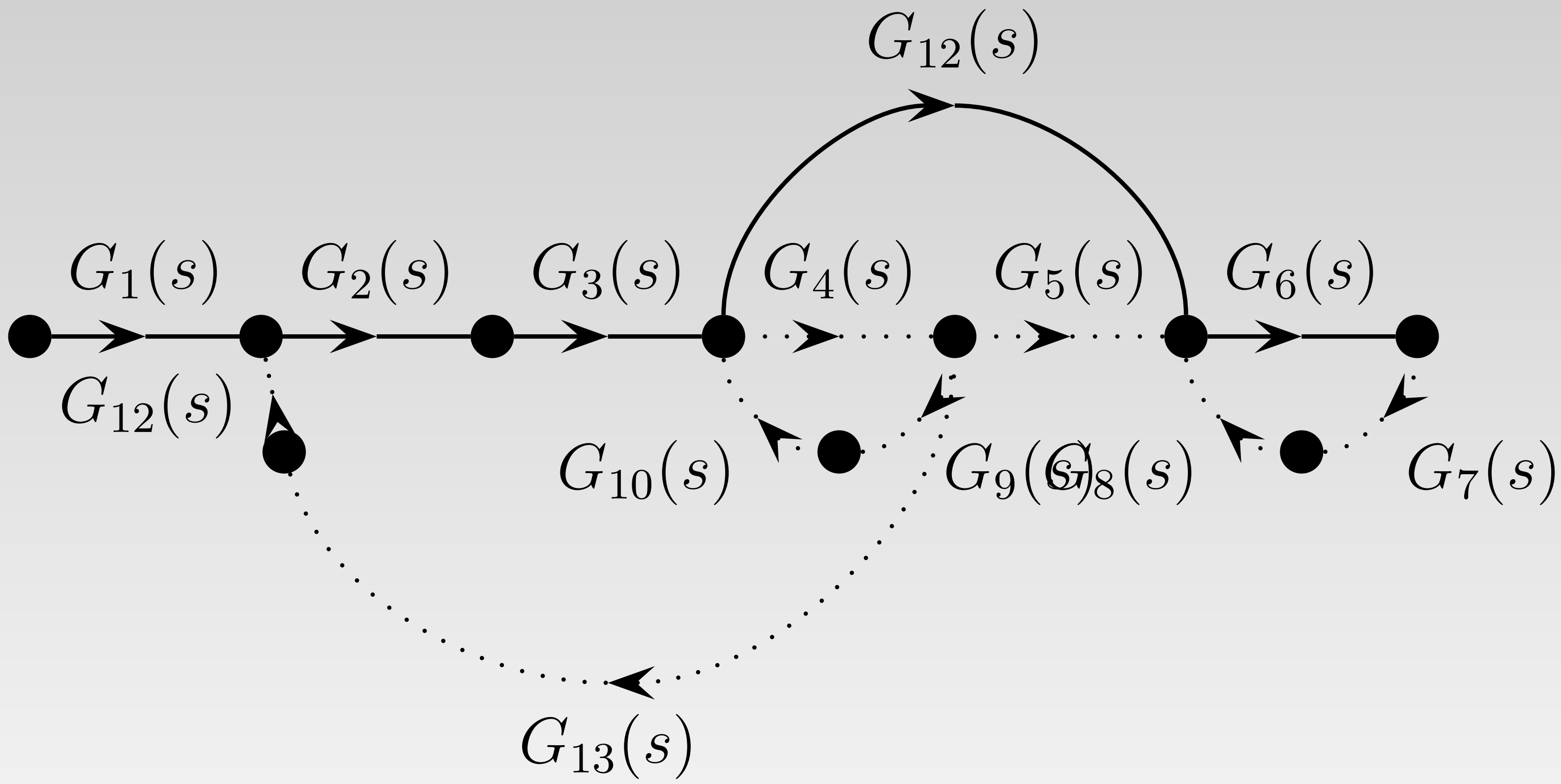


Figura 2: Un camino directo del ejemplo **??**

$G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_{12}(s)G_6(s)$

Lazo cerrado

Conjunto de ramas que parten de un nodo y llegan a el mismo nodo, sin repetir ningún otro nodo.

Lazo cerrado

Conjunto de ramas que parten de un nodo y llegan a el mismo nodo, sin repetir ningún otro nodo.

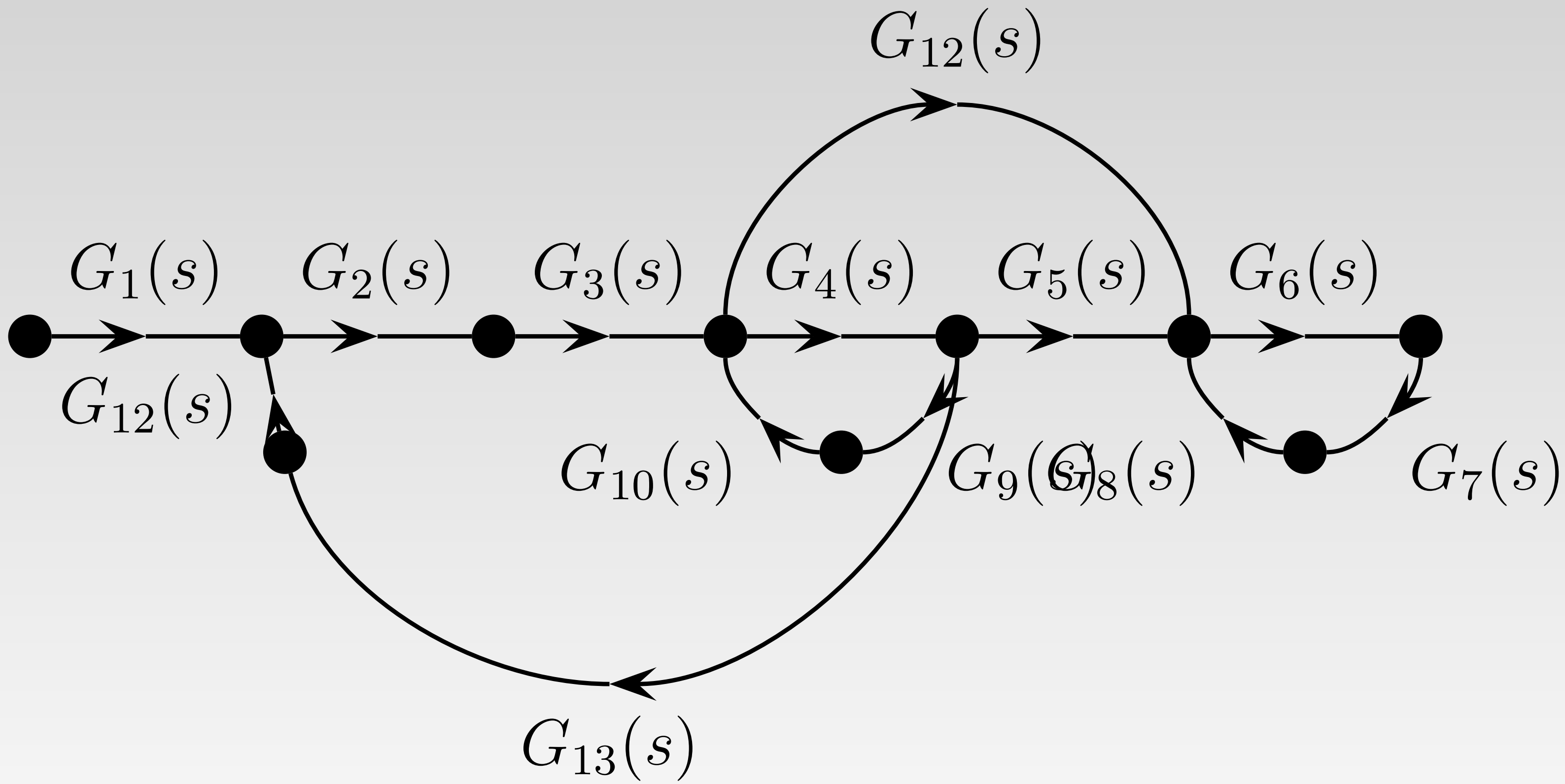


Figura 2: Diagrama de Flujo de Señal del ejemplo **??**

Lazo cerrado

Conjunto de ramas que parten de un nodo y llegan a el mismo nodo, sin repetir ningún otro nodo.

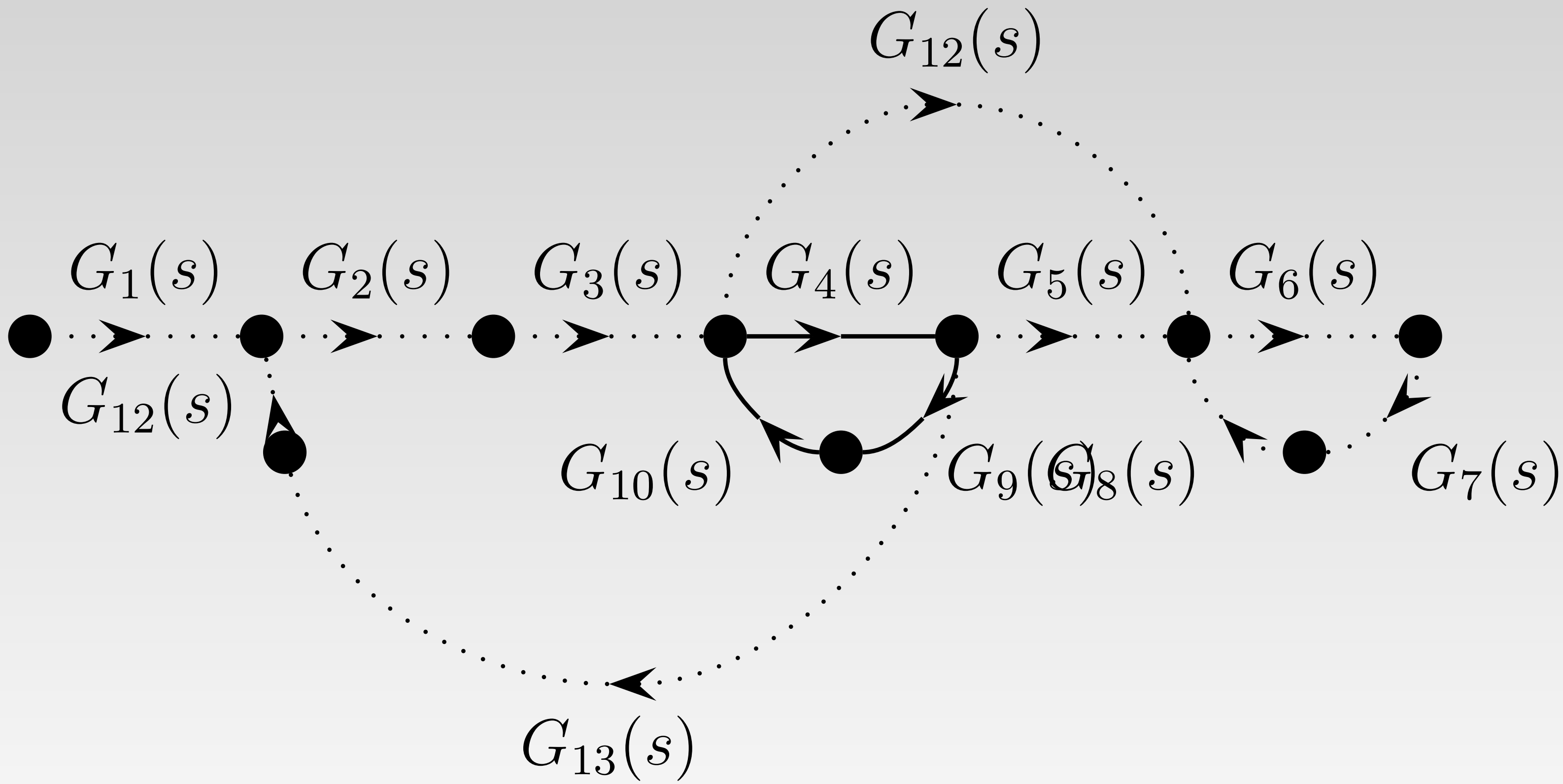


Figura 2: Un Lazo del ejemplo **??**

Lazo cerrado

Conjunto de ramas que parten de un nodo y llegan a el mismo nodo, sin repetir ningún otro nodo.

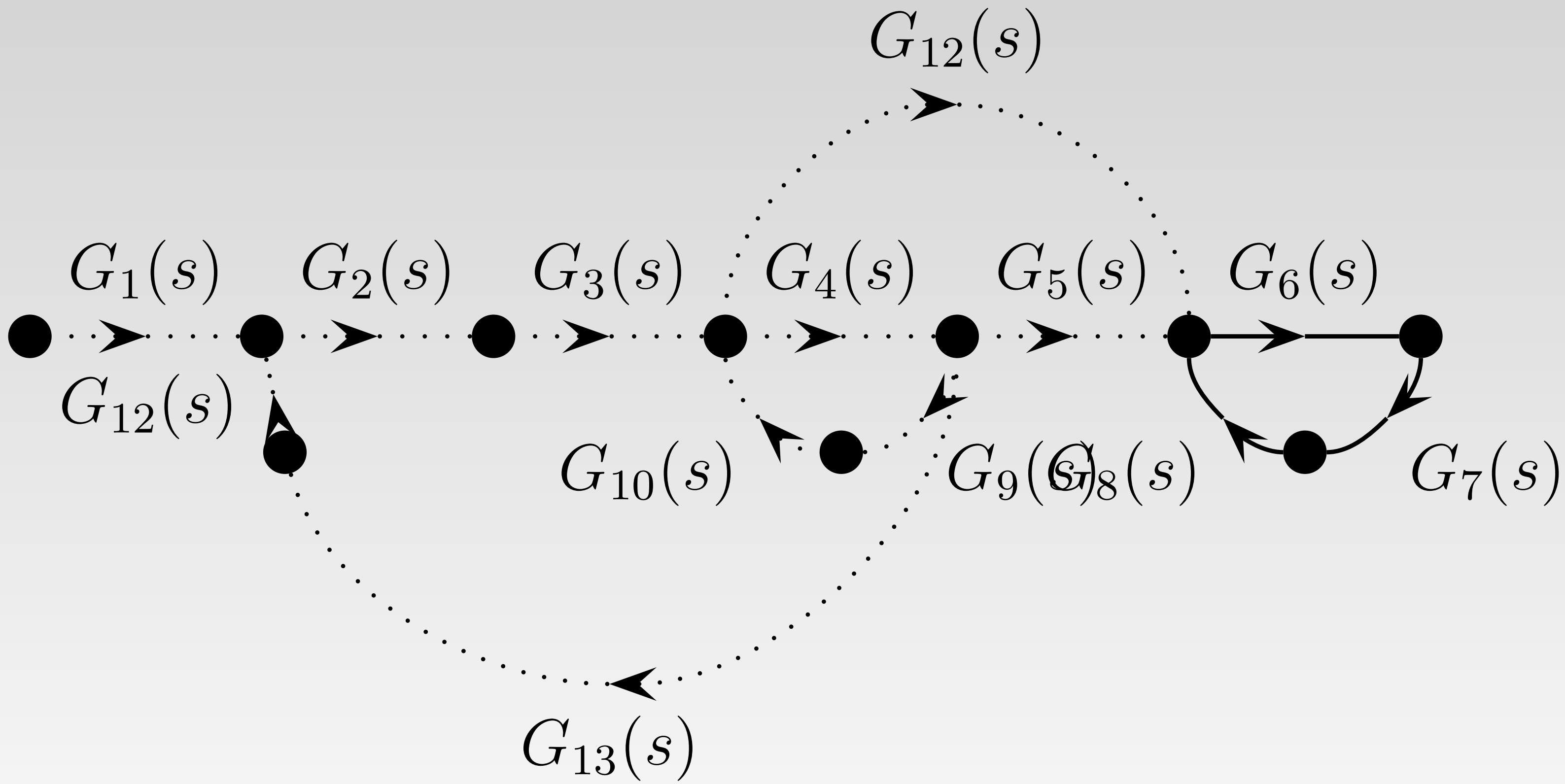


Figura 2: Un Lazo del ejemplo **??**

Lazo cerrado

Conjunto de ramas que parten de un nodo y llegan a el mismo nodo, sin repetir ningún otro nodo.

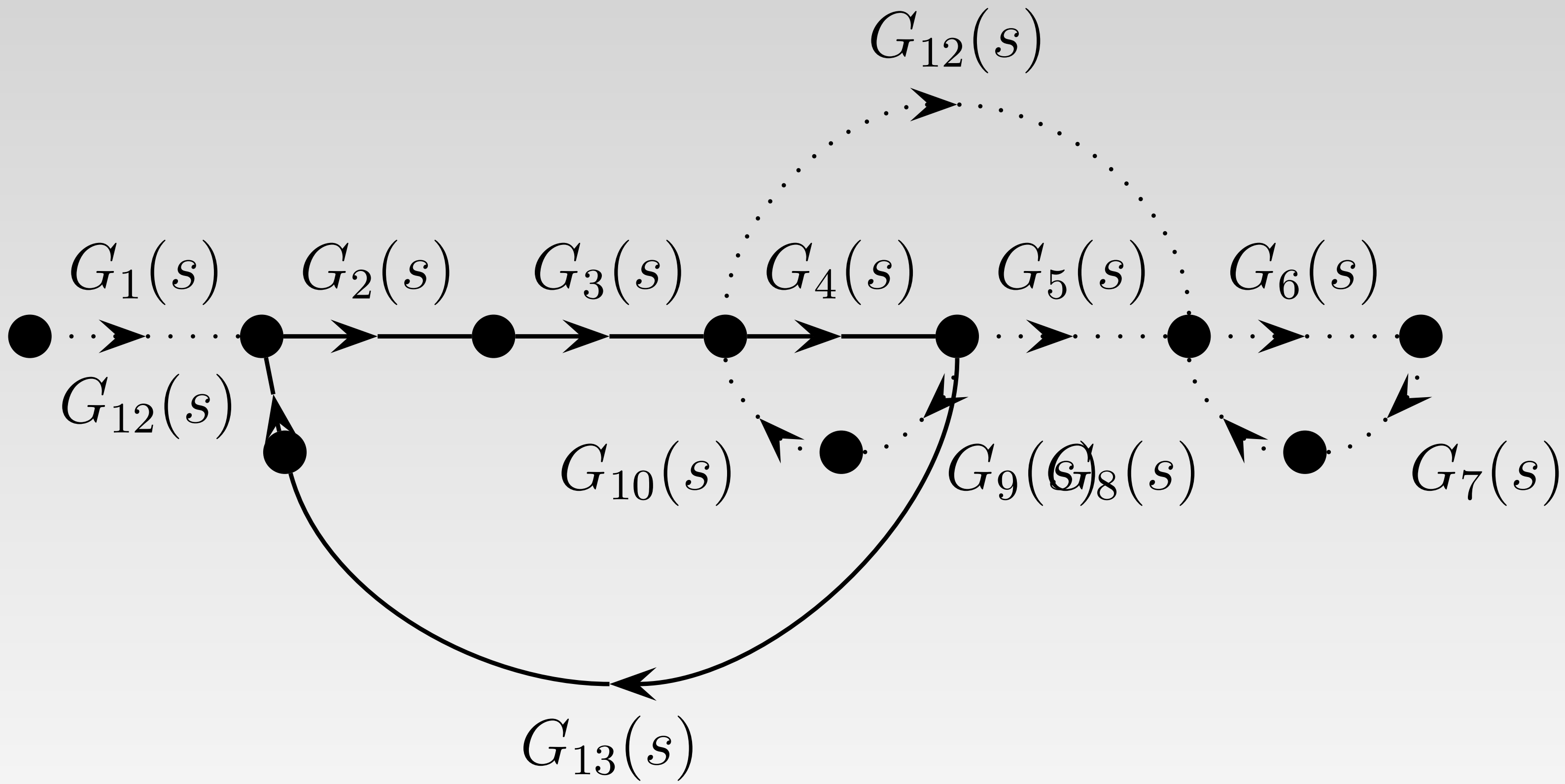


Figura 2: Un Lazo del ejemplo **??**

Ganancia Lazo cerrado

Producto de las Ganancias de las ramas que forman el Lazo.

Lazos Adyacentes

Lazos que comparten al menos un nodo.

Lazos No Adyacentes

Lazos que no comparten nodos.

Lazos No Adyacentes

Lazos que no comparten nodos.

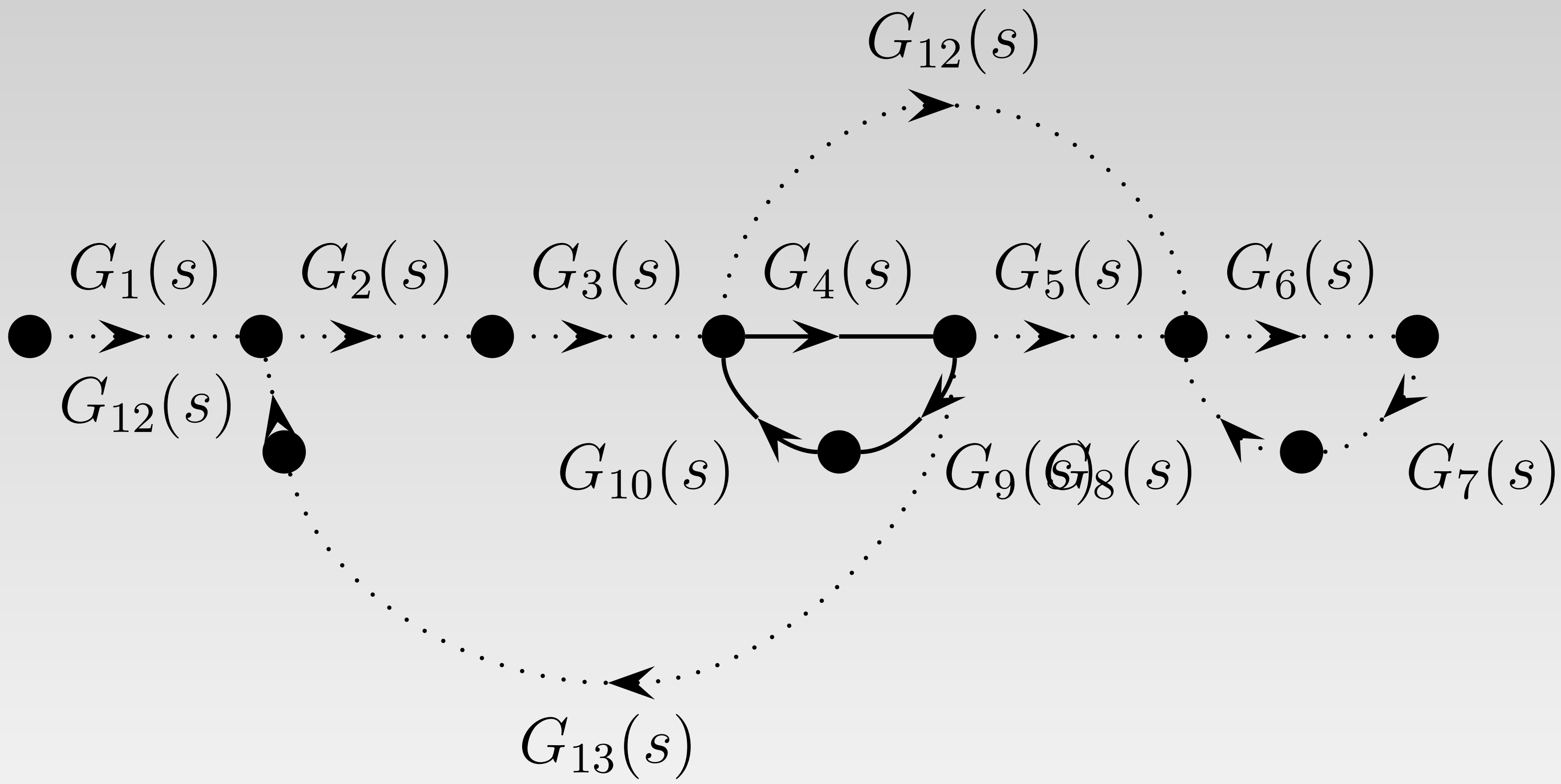


Figura 2: Un Lazo del ejemplo **??**

Lazos No Adyacentes

Lazos que no comparten nodos.

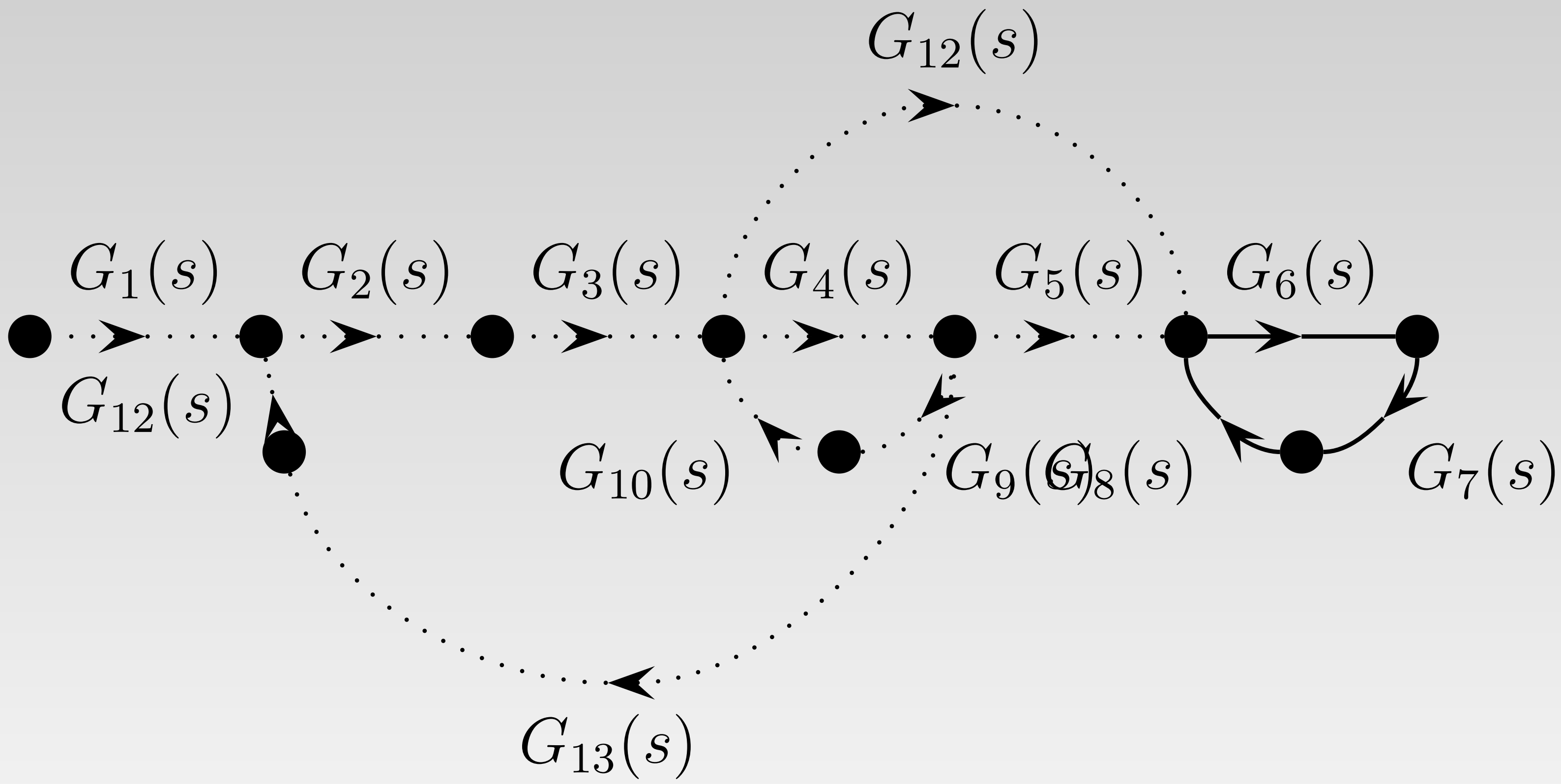


Figura 2: Un Lazo del ejemplo **??**

Regla de Mason

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta}$$

Regla de Mason

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta}$$

- p= Número de Caminos directos de $X(s)$ a $Y(s)$

Regla de Mason

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta}$$

- p= Número de Caminos directos de $X(s)$ a $Y(s)$
- T_k= Ganancia del camino directo número k

Regla de Mason

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta}$$

- p= Número de Caminos directos de $X(s)$ a $Y(s)$
- T_k= Ganancia del camino directo número k
- Δ= 1

  - (Suma de ganancias de lazos cerrados)

  + (Suma de ganancias de lazos no adyacentes de a 2)

  - (Suma de ganancias de lazos no adyacentes de a 3)

  + (Suma de ganancias de lazos no adyacentes de a 4)

  $- \dots$

Regla de Mason

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta}$$

- p= Número de Caminos directos de $X(s)$ a $Y(s)$
- T_k= Ganancia del camino directo número k
- Δ= 1

  - (Suma de ganancias de lazos cerrados)

  + (Suma de ganancias de lazos no adyacentes de a 2)

  - (Suma de ganancias de lazos no adyacentes de a 3)

  + (Suma de ganancias de lazos no adyacentes de a 4)

  $- \dots$
- Δ_k :Δ para el diagrama eliminando el camino número k

Ejemplo

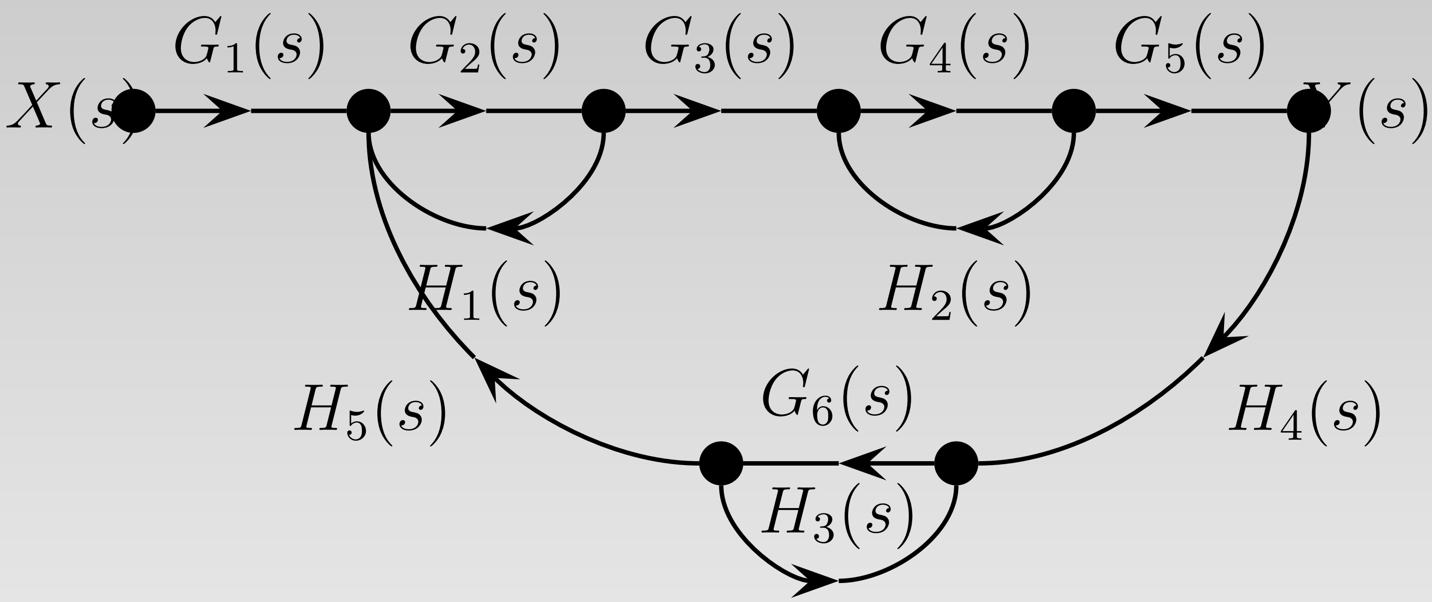


Figura 2: Diagrama de Flujo de Señal del ejemplo **??**

Ejemplo

Sólo existe un camino directo ($p = 1$), cuya ganancia es:

$$T_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$

Existen cuatro lazos cerrados, cuyas ganancias son:

$$\begin{aligned} L_1 &= G_2H_1 \\ L_2 &= G_4H_2 \\ L_3 &= G_6H_3 \\ L_4 &= G_2G_3G_4G_5H_4G_6H_5 \end{aligned}$$

Ejemplo

Como existen 4 lazos, hay 6 posibles grupos de a 2 lazos (L_1L_2, L_1L_3, L_1L_4, L_2L_3, L_2L_4, L_3L_4), pero de ellos, solo son No adyacentes los siguientes:

$$L_1L_2 = G_2H_1G_4H_2$$
$$L_1L_3 = G_2H_1G_6H_3$$
$$L_2L_3 = G_4H_2G_6H_3$$

Ejemplo

Como existen 4 lazos, hay 4 posibles grupos de a 3 lazos ($L_1L_2L_3$, $L_1L_2L_4$, $L_1L_3L_4$, $L_2L_3L_4$), pero de ellos, solo hay uno que es No adyacentes:

$$L_1L_2L_3 = G_2H_1G_4H_2G_6H_3$$

Como existen 4 lazos, sólo hay un posible grupo de a 4 lazos ($L_1L_2L_3L_4$), pero estos son adyacentes.

Ejemplo

De acuerdo con lo anterior, el valor de Δ es:

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \\ -(L_1 + L_2 + L_3) \\ +(L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) \\ -(L_1L_2L_3) \end{array} \right\}$$

Ejemplo

$$\Delta = \begin{cases} 1 \\ -(G_2H_1 + G_4H_2 + G_6H_3 + G_2G_3G_4G_5H_4G_6H_5) \\ +(G_2H_1G_4H_2 + G_2H_1G_6H_3 + G_4H_2G_6H_3) \\ -(G_2H_1G_4H_2G_6H_3) \end{cases}$$

Para el único camino directo, el valor Δ_1 se puede obtener eliminando de Δ los términos que contienen uno o más de las ganancias del camino directo (G_1, G_2, G_3, G_4, o G_5). Por lo tanto resulta:

$$\Delta_1 = 1 - (G_6H_3)$$

Ejemplo

Dado que sólo hay un camino directo, la función de transferencia se calcula como:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta}$$

Respuesta al impulso

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Respuesta al Impulso discreto

Respuesta del sistema cuando la entrada es el *impulso unitario* $\delta(k)$, con condiciones iniciales nulas. La respuesta al impulso suele denotarse por $h(k)$, y su transformada $\mathcal{Z}$ por $H(z)$

Figura 2: Sistema Dinámico Discreto

Función Impulso discreto

La función $\delta(k)$ se define como:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

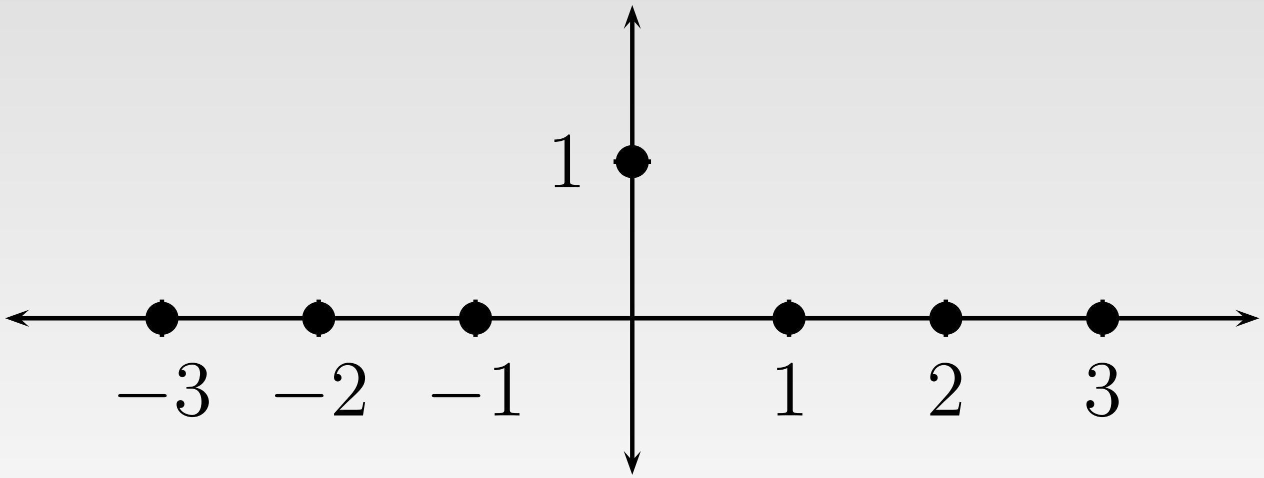


Figura 2: Función Impulso Unitario discreto

Función Impulso discreto

Una de las características importantes de la función $\delta(k)$ es que su transformada $\mathcal{Z}$ es 1, tal como se muestra a continuación:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0) z^{-0} = 1$$

Respuesta al Impulso discreto unitario

Supóngase un sistema discreto con condiciones iniciales Nulas, con función de transferencia $F(z)$, que se excita con el impulso unitario .
La respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia z será el producto de la entrada por la función de transferencia:

$$H(z) = U(z)F(z) = 1F(z) = F(z)$$

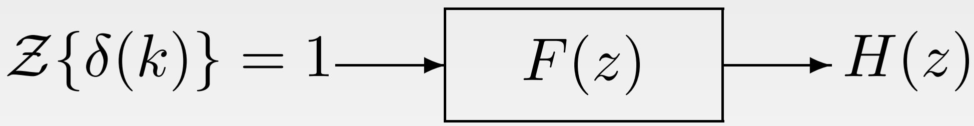


Figura 2: Sistema Dinámico Discreto estimulado con el impulso unitario

Respuesta al Impulso discreto

La Función de Transferencia es la Transformada $\mathcal{Z}$ de la Respuesta al impulso

$$\begin{tikzcd}
\text{Respuesta al Impulso} \arrow[r, bend left, "\mathcal{Z}"] & \text{Función de Transferencia} \arrow[l, bend left, "\mathcal{Z}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Relación entre la respuesta al impulso y la Función de Transferencia. Caso Discreto

Respuesta al Impulso discreto

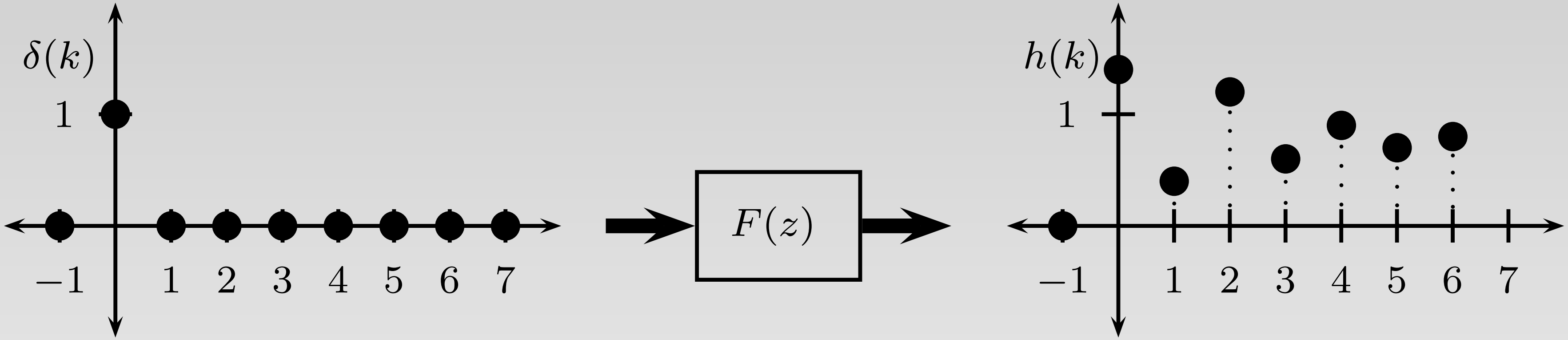


Figura 2: Respuesta al Impulso discreto

Respuesta al Impulso discreto

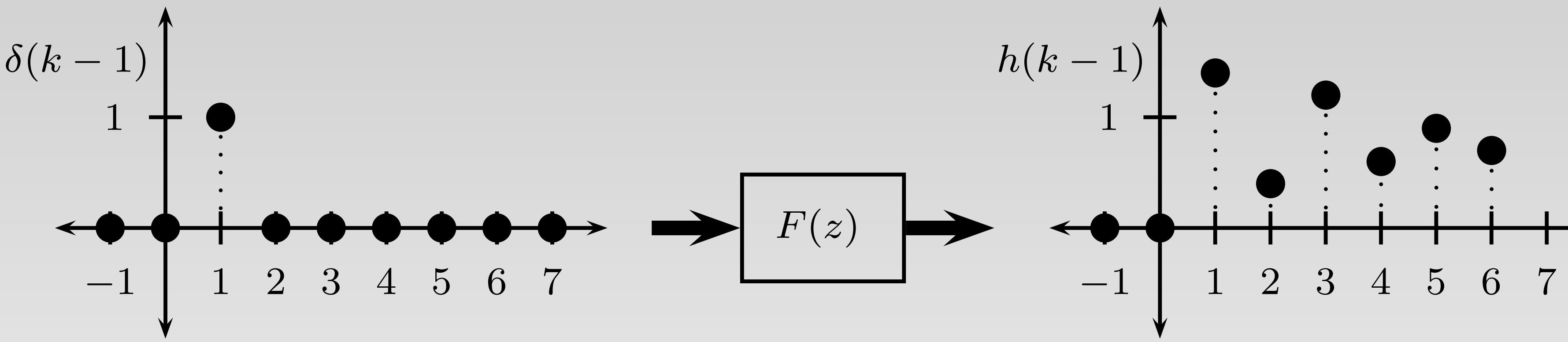


Figura 2: Respuesta al Impulso discreto retrasado

Respuesta al Impulso discreto

$$c\delta(k-i) \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow ch(k-i)$$

Figura 2: Respuesta al Impulso discreto genérica

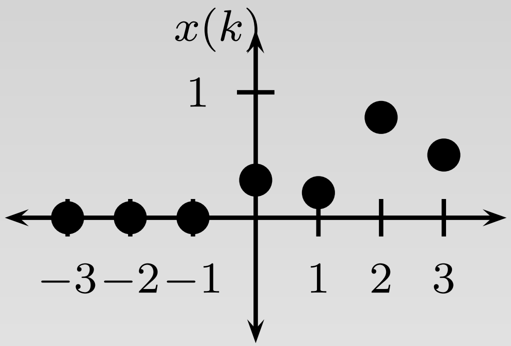
Convolución

Cualquier señal $x(k)$ (nula para $k < 0$) puede escribirse como

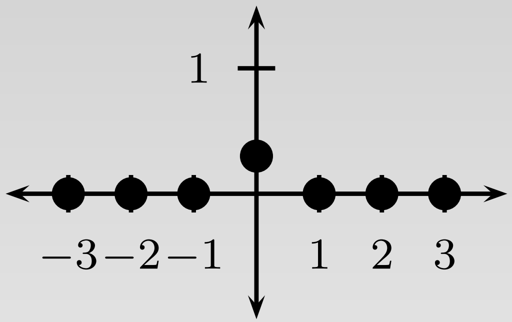
$$x(k) = x(0)\delta(k-0) + x(1)\delta(k-1) + \cdots$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)\delta(k-i)$$

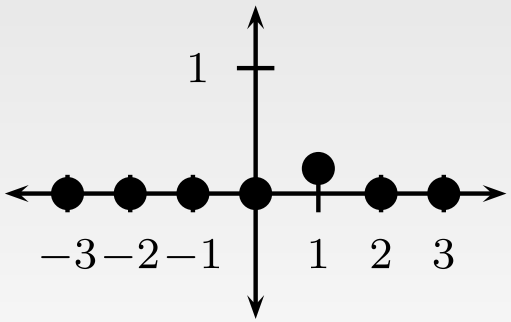
Convolución



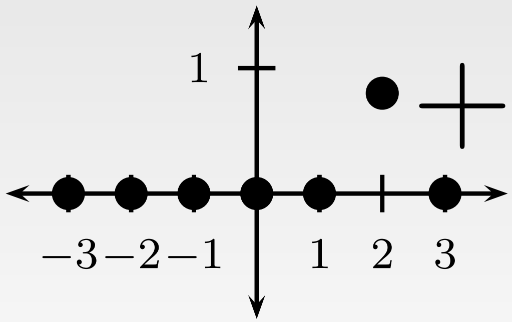
$=$



$+$



$+$



$+ \cdots$

Convolución

Debido a que el sistema es lineal, podemos aplicar el principio de superposición, y obtener la respuesta del sistema $y(k)$ cuando la entrada es $x(k)$ como la suma debida a cada uno de los impulsos (suponiendo condiciones iniciales nulas). Por tanto la respuesta $y(k)$ será de la forma:

$$y(k) = x(0)h(k-0) + x(1)h(k-1) + \cdots$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)h(k-i) = x(k) * h(k)$$

Convolución

El resultado anterior no debe sorprender, ya que al aplicar transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de la igualdad se tiene:

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k) * h(k)\}$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k)\}\mathcal{Z}\{h(k)\} = X(z)H(z)$$

Y la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso resulta ser la Función de Transferencia del sistema

$$\begin{tikzcd} \text{Respuesta al Impulso} \arrow[r, bend left, "\mathcal{Z}"] & \text{Función de Transferencia} \arrow[l, bend left, "\mathcal{Z}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Función Impulso Continuo

Función $d_\Delta(t)$

$$d_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & t \in [0, \Delta] \\ 0 & t \notin [0, \Delta] \end{cases} \qquad \Delta > 0$$

Al área bajo la gráfica es 1

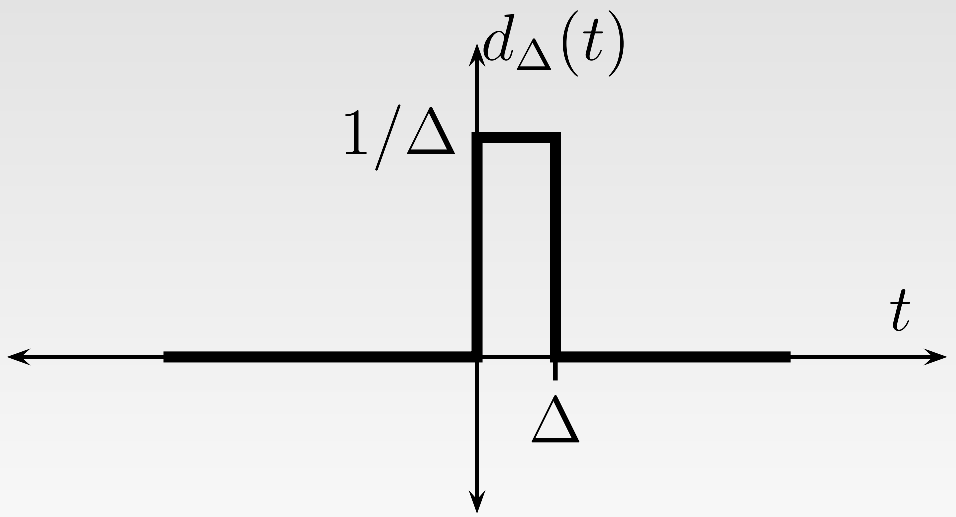


Figura 2: Función d_Δ

Función Impulso Continuo

Se define la función *delta de Dirac* como la función que resulta al disminuir Δ progresivamente, hasta llevarlo al límite en que tiende a cero:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} d_\Delta(t)$$

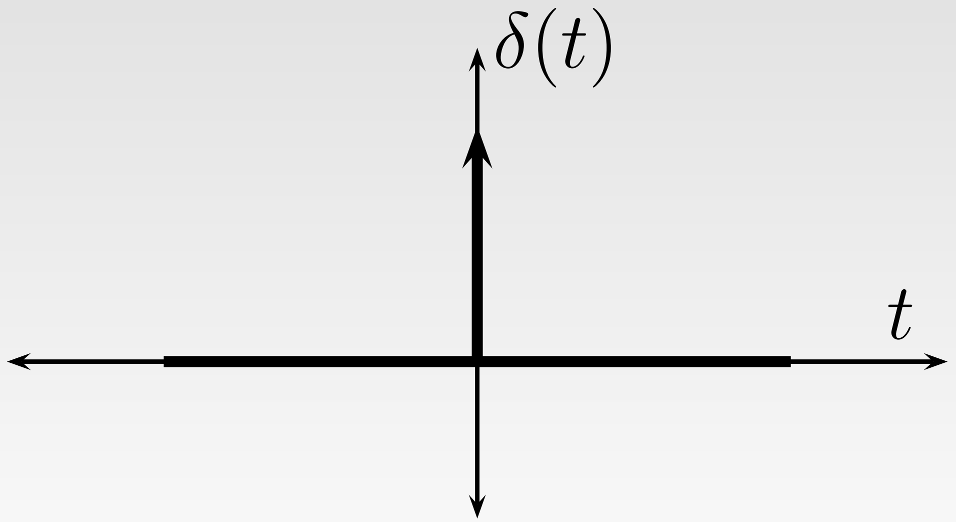


Figura 2: Función Impulso Unitario Continuo

Función Impulso Continuo

área bajo la gráfica es 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Area bajo la gráfica desde $-\infty$ hasta un valor t el resultado es la función *escalón unitario* $\mu(t)$

$$\int_{0^-}^{t} \delta(t)dt = \mu(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

Función Impulso Continuo

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt = 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t x(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}}{s} = \frac{X(s)}{s}$$

Observese que la transformada de Laplace de $\mu(t)$, que es $1/s$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}\left\{\mu(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t \delta(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}}{s} = \frac{1}{s}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

$1/\Delta$

Función Impulso Continuo

Área del producto $d_\Delta(t-\tau)f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d_\Delta(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{\tau+\Delta} f(t)\frac{1}{\Delta}dt$$

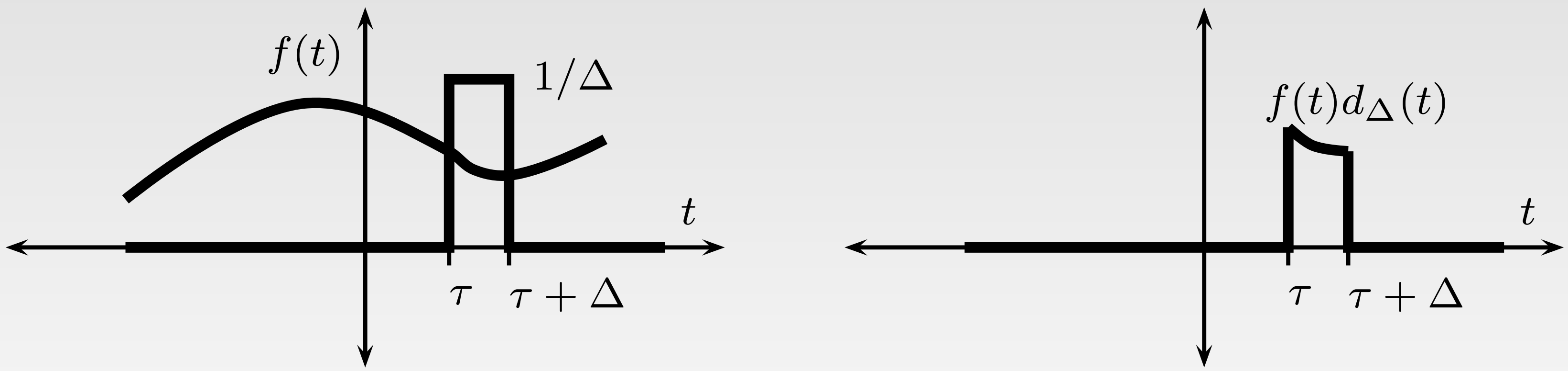


Figura 2: Función d_Δ

Función Impulso Continuo

Para valores de Δ suficientemente pequeños, el área puede hacerse equivalente a la de un rectángulo de base Δ y altura $f(\tau)\frac{1}{\Delta}$, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d_{\Delta}(t-\tau)dt = \Delta f(\tau)\frac{1}{\Delta} = f(\tau)$$

El límite puede introducirse en la integral, con lo que se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\lim_{\Delta\to 0} d_{\Delta}(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$

Función Impulso Continuo

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \longrightarrow \boxed{F(s)} \longrightarrow H(s)$$

Figura 2: Sistema Dinámico Contínuo estimulado con el impulso unitario

$$H(s) = U(s)F(s) = 1F(s) = F(s)$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Respuesta al Impulso} \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & \text{Función de Transferencia} \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$