

Sistemas de Primer y Segundo Orden

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Sistema Continuo. 1^{er} Orden

Un sistema continuo de primer orden, cuya función de transferencia es

$$F(s) = \frac{1}{s + a}$$

Se estimula con un paso unitario $\mu(t)$, ($C.I. = 0$), la respuesta $y(t)$ es:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{1}{(s + a)} \frac{1}{s} = \frac{1/a}{s} + \frac{-1/a}{s + a}$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Sistema Continuo. 1^{er} Orden

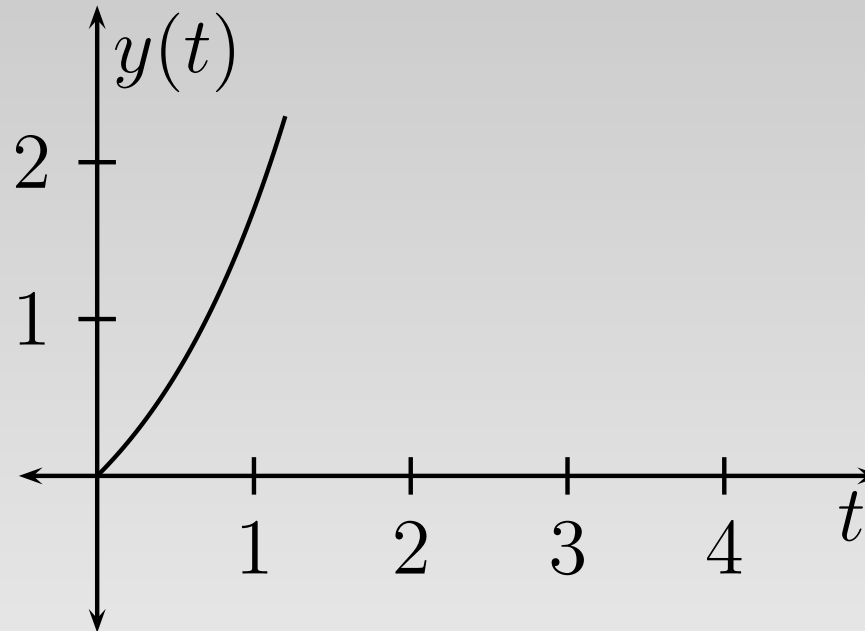


Figura 1: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden, $a = -1$, polo en $s = 1$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Sistema Continuo. 1^{er} Orden

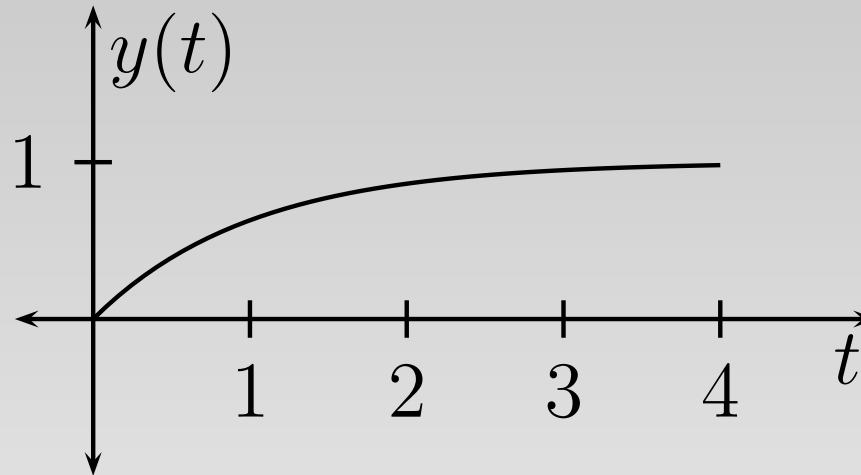


Figura 2: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden, $a = 1$, polo en $s = -1$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Sistema Continuo. 1^{er} Orden

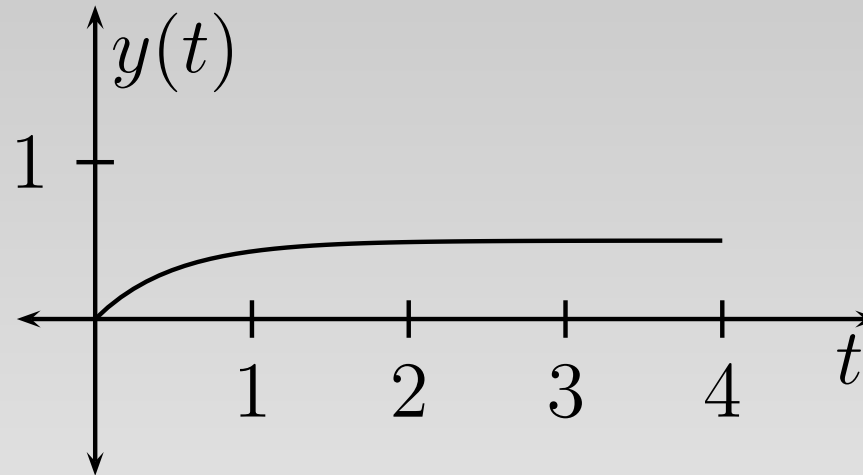


Figura 3: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden, $a = 2$, polo en $s = -2$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Sistema Continuo. 1^{er} Orden

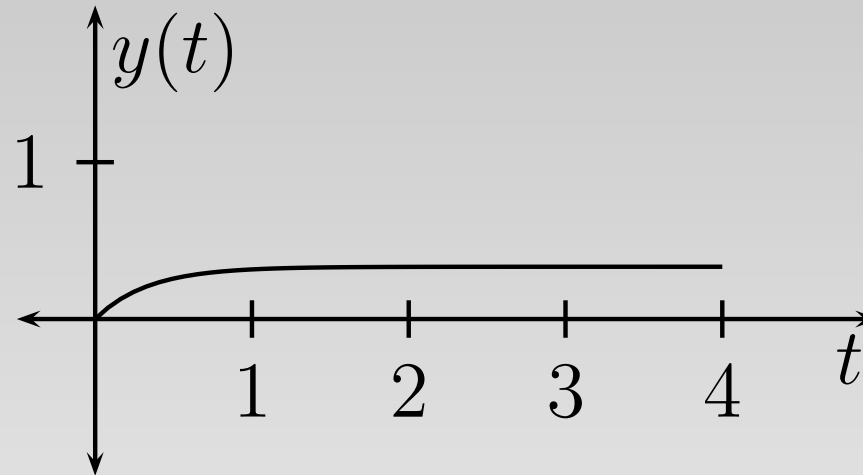


Figura 4: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden, $a = 3$, polo en $s = -3$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Sistema Continuo. 1^{er} Orden

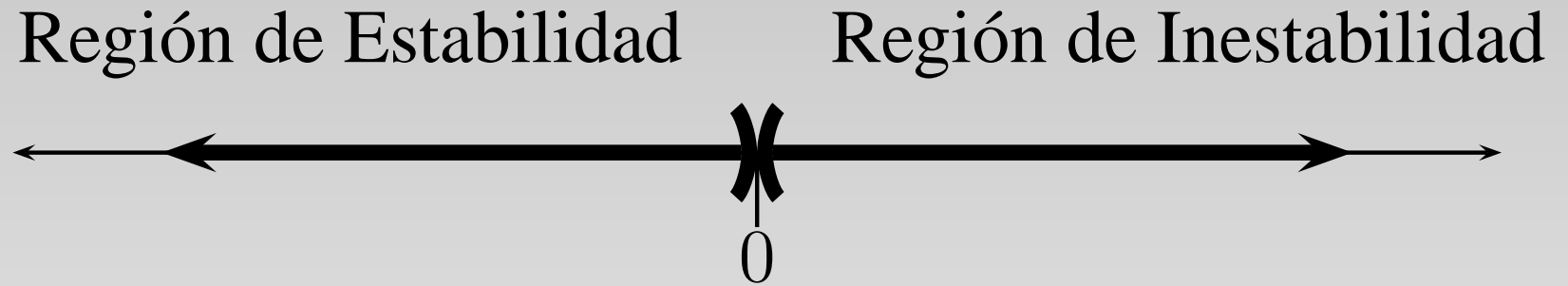


Figura 5: Regiones de estabilidad e inestabilidad para un sistema continuo de primer orden

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Tiempo de Asentamiento

tiempo de asentamiento o tiempo de estabilización:
tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera un porcentaje de su valor máximo, por ejemplo el 5 %.

Para el caso del sistema continuo de primer orden, este tiempo t_{as} que satisface:

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

$$e^{-at_{as}} = 0.05 \quad t_{as} = -\frac{\ln 0.05}{a} \quad t_{as} = 3/a$$

Tiempo de Asentamiento

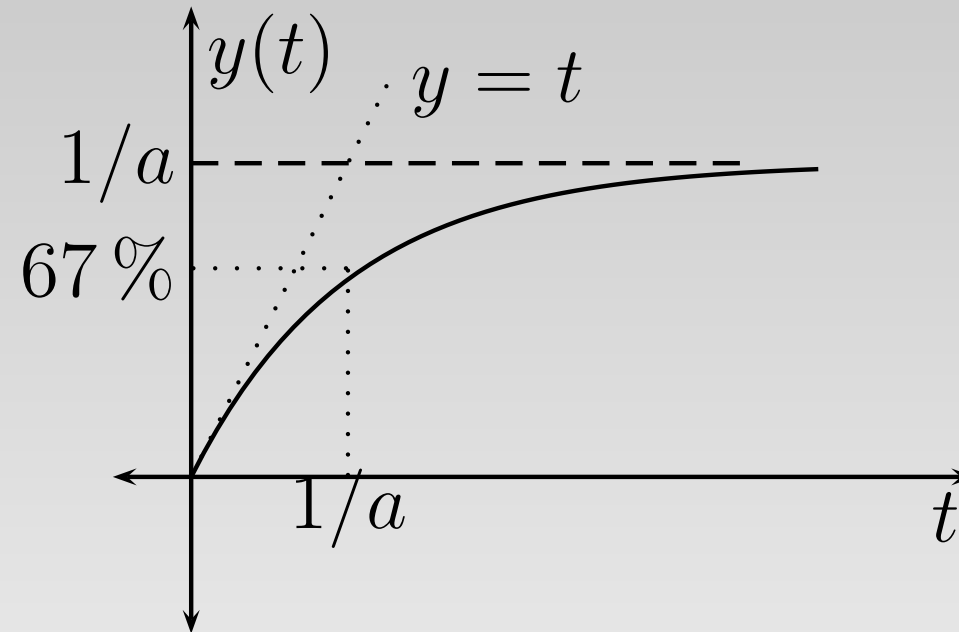


Figura 6: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden, polo en $-a$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu(t)$$

Tiempo de Asentamiento

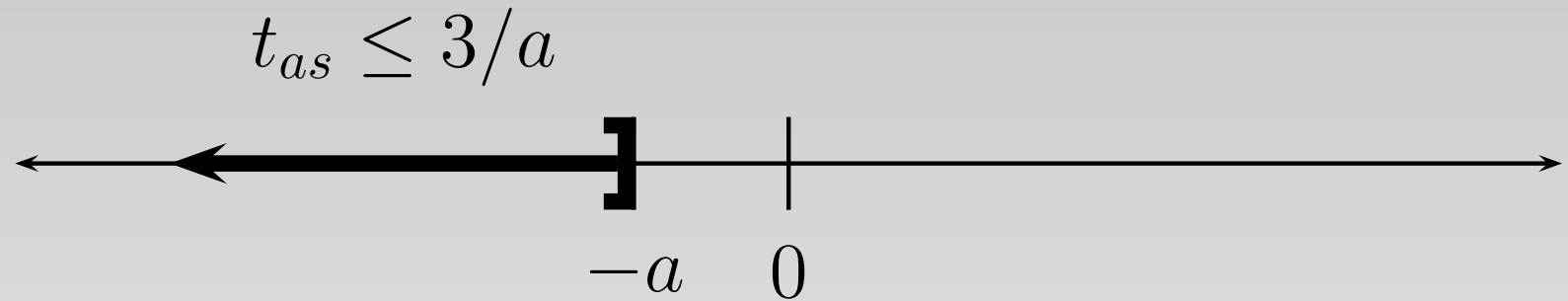


Figura 7: Región de tiempo de asentamiento máximo para un sistema continuo de primer orden

Sistema Discreto. 1^{er} Orden

Un sistema discreto de primer orden, cuya función de transferencia es

$$F(z) = \frac{1}{z + a}$$

Se estimula con un paso unitario $\mu(k)$, ($C.I. = 0$)

$$Y(z) = F(z)U(z) = \frac{1}{(z + a)} \frac{z}{(z - 1)} =$$

$$Y(z) = \frac{z/(1 + a)}{(z - 1)} - \frac{z/(1 + a)}{z + a}$$

$$y(k) = \frac{1}{(1 + a)} (1 - (-a)^k) \mu(k)$$

Sistema Discreto. 1^{er} Orden

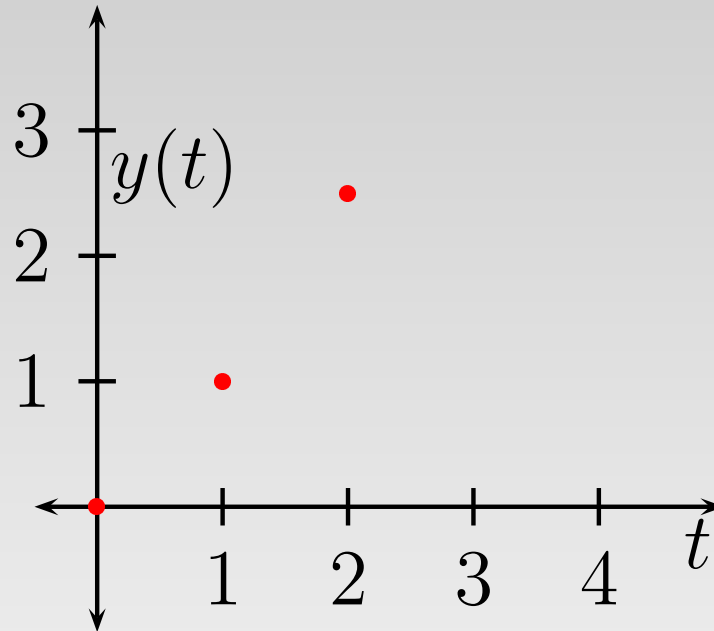


Figura 8: Respuesta al paso de un sistema discreto de primer orden, $a = -1.5$, polo en $s = 1.5$

Sistema Discreto. 1^{er} Orden

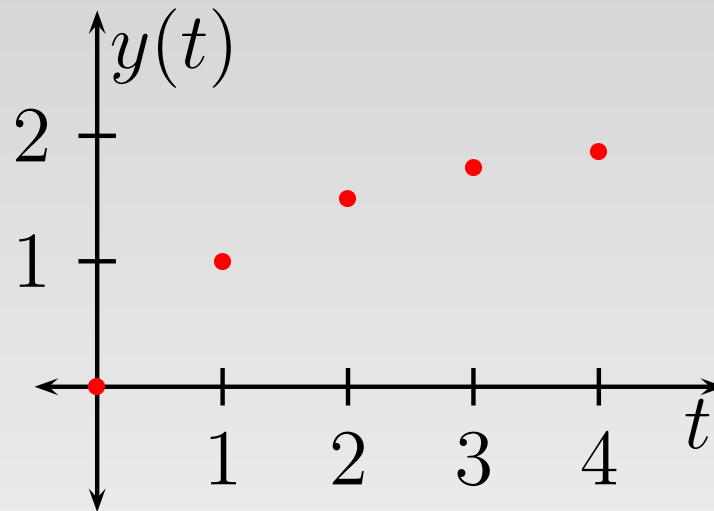


Figura 9: Respuesta al paso de un sistema discreto de primer orden, $a = -.5$, polo en $s = .5$

Sistema Discreto. 1^{er} Orden

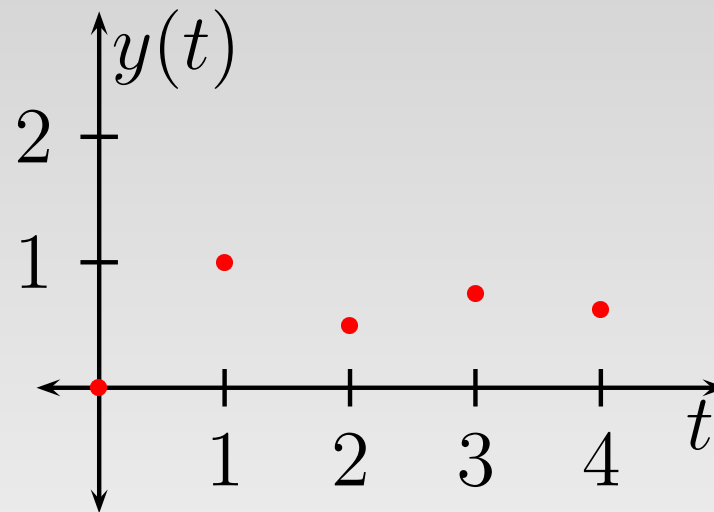


Figura 10: Respuesta al paso de un sistema discreto de primer orden, $a = .5$, polo en $s = -.5$

Sistema Discreto. 1^{er} Orden

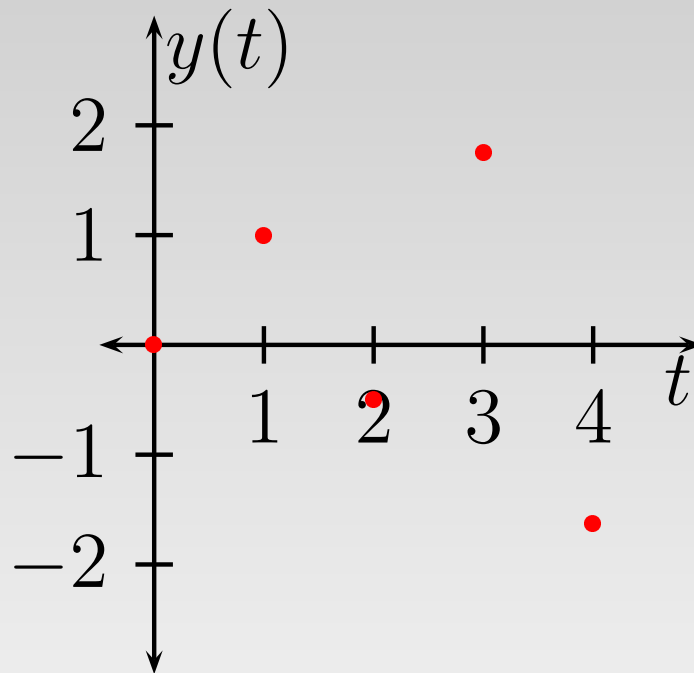


Figura 11: Respuesta al paso de un sistema discreto de primer orden, $a = 1.5$, polo en $s = -1.5$

Sistema Discreto. 1^{er} Orden

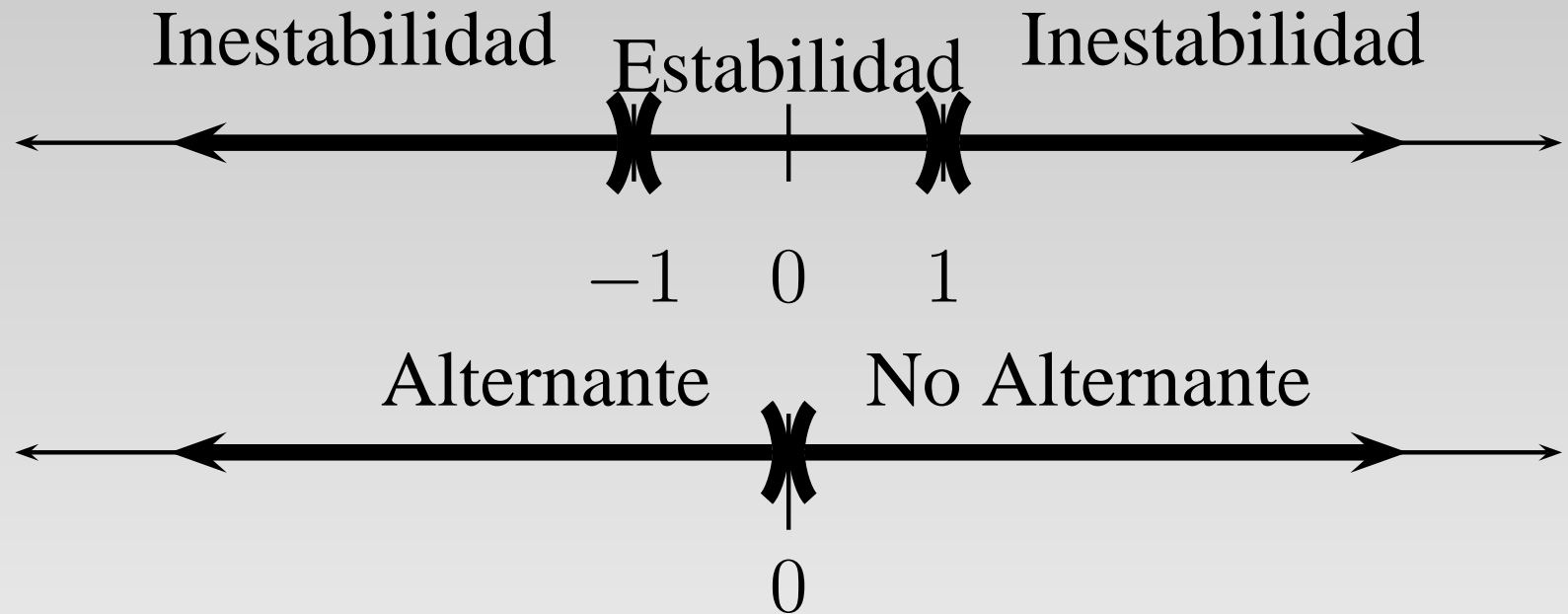


Figura 12: Regiones de estabilidad e inestabilidad para un sistema discreto de primer orden

Tiempo de Asentamiento

tiempo de asentamiento o tiempo de estabilización:
tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera un porcentaje de su valor máximo, por ejemplo el 5 %.

Para el caso del sistema discreto de primer orden, este tiempo t_{as} que satisface:

$$y(k) = \frac{1}{(1+a)} (1 - (-a)^k) \mu(k)$$

$$(|-a|)^{k_{as}} = 0.05 \quad k_{as} = \frac{\ln 0.05}{\ln(|a|)} \quad k_{as} = \frac{-3}{\ln(|a|)}$$

Tiempo de Asentamiento

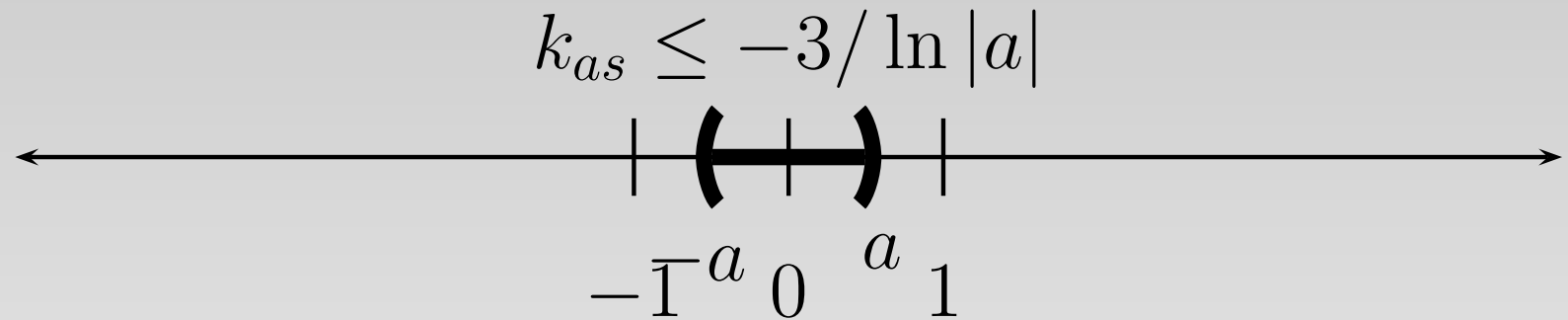


Figura 13: Regiones de tiempo de asentamiento máximo para un sistema discreto de primer orden

Sistema Continuo. 2º Orden

Un sistema continuo de segundo orden, cuya función de transferencia es

$$F(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Los polos de la función de transferencia serán:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}}{2} = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

Si $|\xi| < 1$, el radical es negativo, y los polos resultan ser complejos conjugados:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Sistema Continuo. 2º Orden

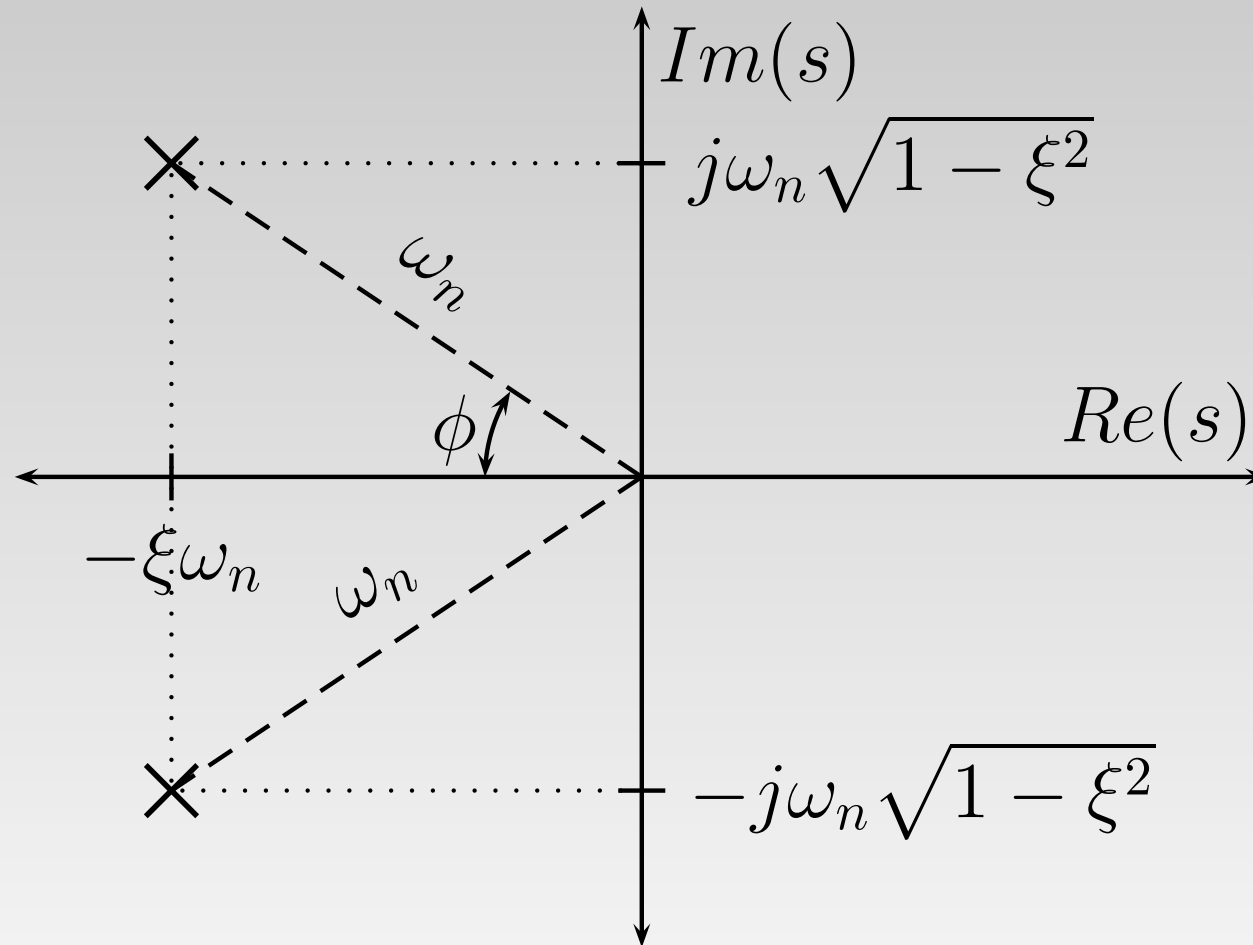


Figura 14: Ubicación de los polos de un sistema continuo de segundo orden, con polos complejos

Sistema Continuo. 2º Orden

$$F(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

La distancia de los polos al origen (la magnitud del complejo) es justamente ω_n :

$$d = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} = \omega_n$$

Además, el coseno del ángulo ϕ formado con el semieje real negativo, es justamente ξ :

$$\cos \phi = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi$$

Sistema Continuo. 2º Orden

Se estimula el sistema con un paso unitario $\mu(t)$,
($C.I. = 0$), la respuesta $y(t)$ es:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{\omega_n}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] \mu(t)$$

$$\phi = \cos^{-1} \xi$$

Sistema Continuo. 2º Orden

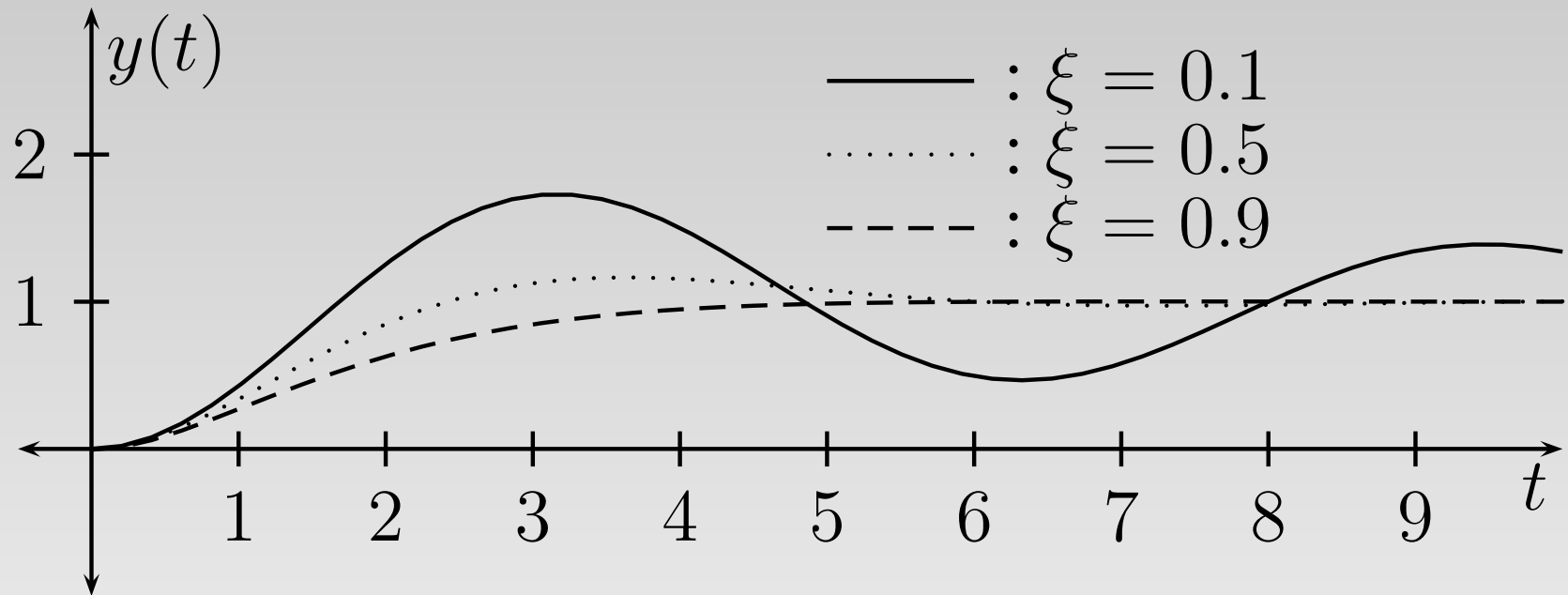


Figura 15: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, $w_n = 1$

Sistema Continuo. 2º Orden

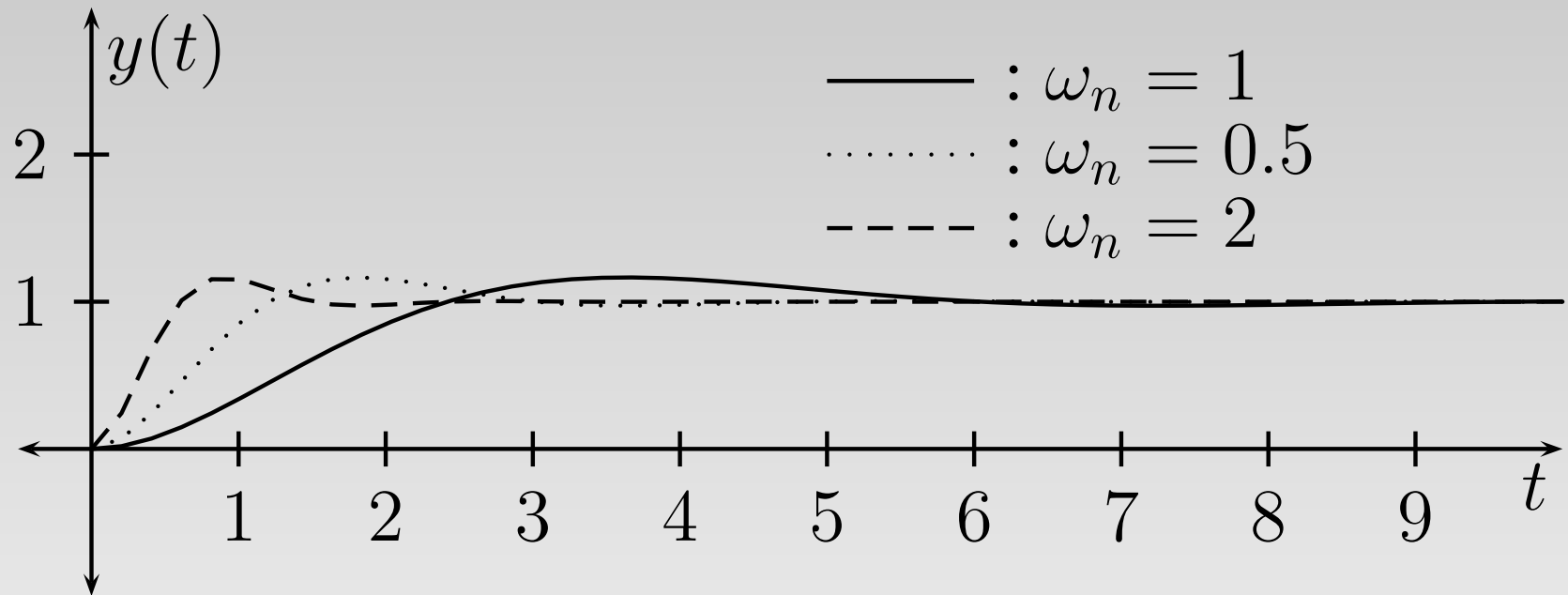


Figura 16: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, $\xi = 0.5$

Sistema Continuo. 2º Orden

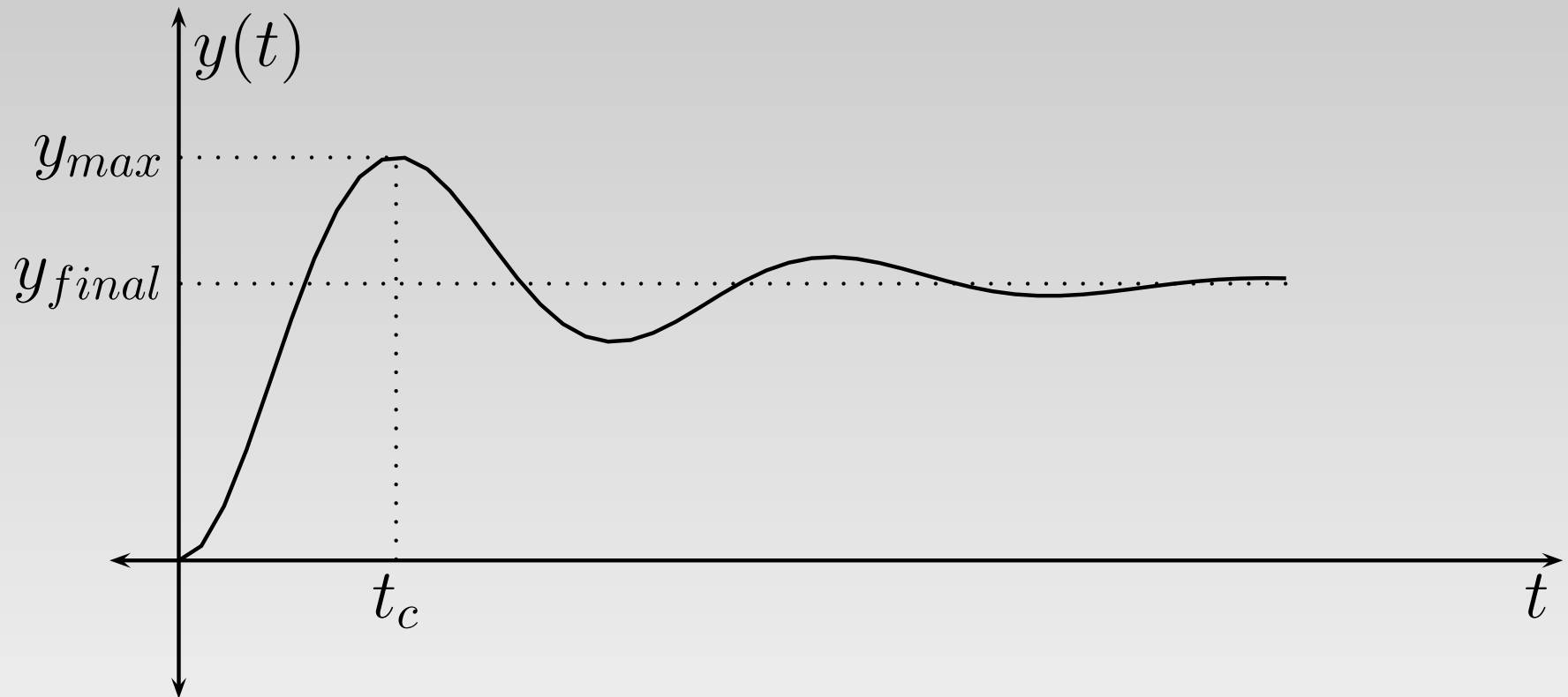


Figura 17: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden

Sistema Continuo. 2º Orden

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] \mu(t)$$

$$\phi = \cos^{-1} \xi$$

- Estabilidad
- Tiempo de Asentamiento
- Frecuencia de Oscilación
- Sobrepico

Sistema Continuo. 2º Orden

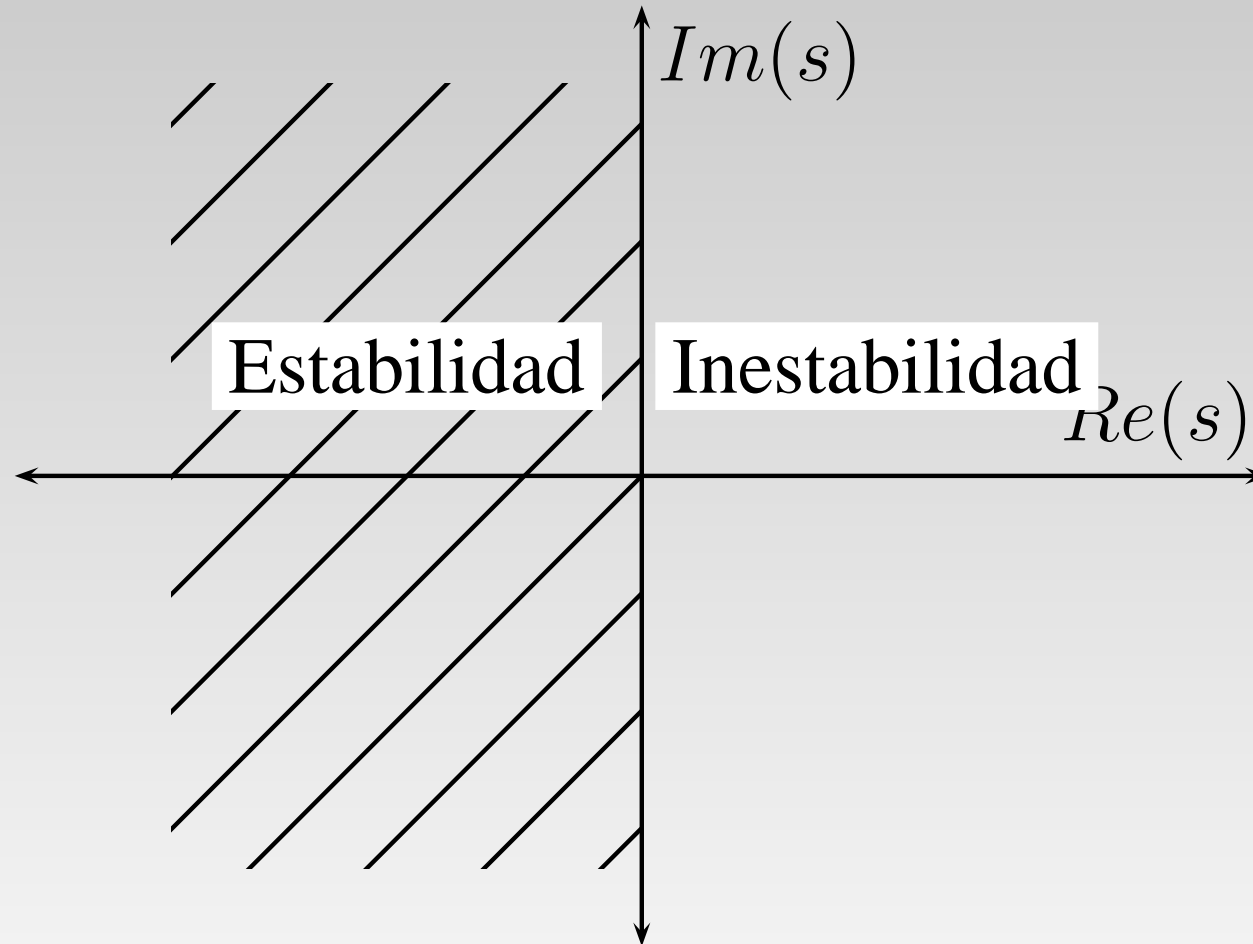


Figura 18: Región de Estabilidad para un sistema continuo de segundo orden

Tiempo de Asentamiento

Tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera un porcentaje de su valor máximo, por ejemplo el 5 %

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] \mu(t)$$

$$e^{-\xi\omega_n t_{as}} = 0.05 \quad t_{\xi\omega_n s} = -\frac{\ln 0.05}{\xi\omega_n} \quad t_{as} = 3/\xi\omega_n$$

Tiempo de Asentamiento

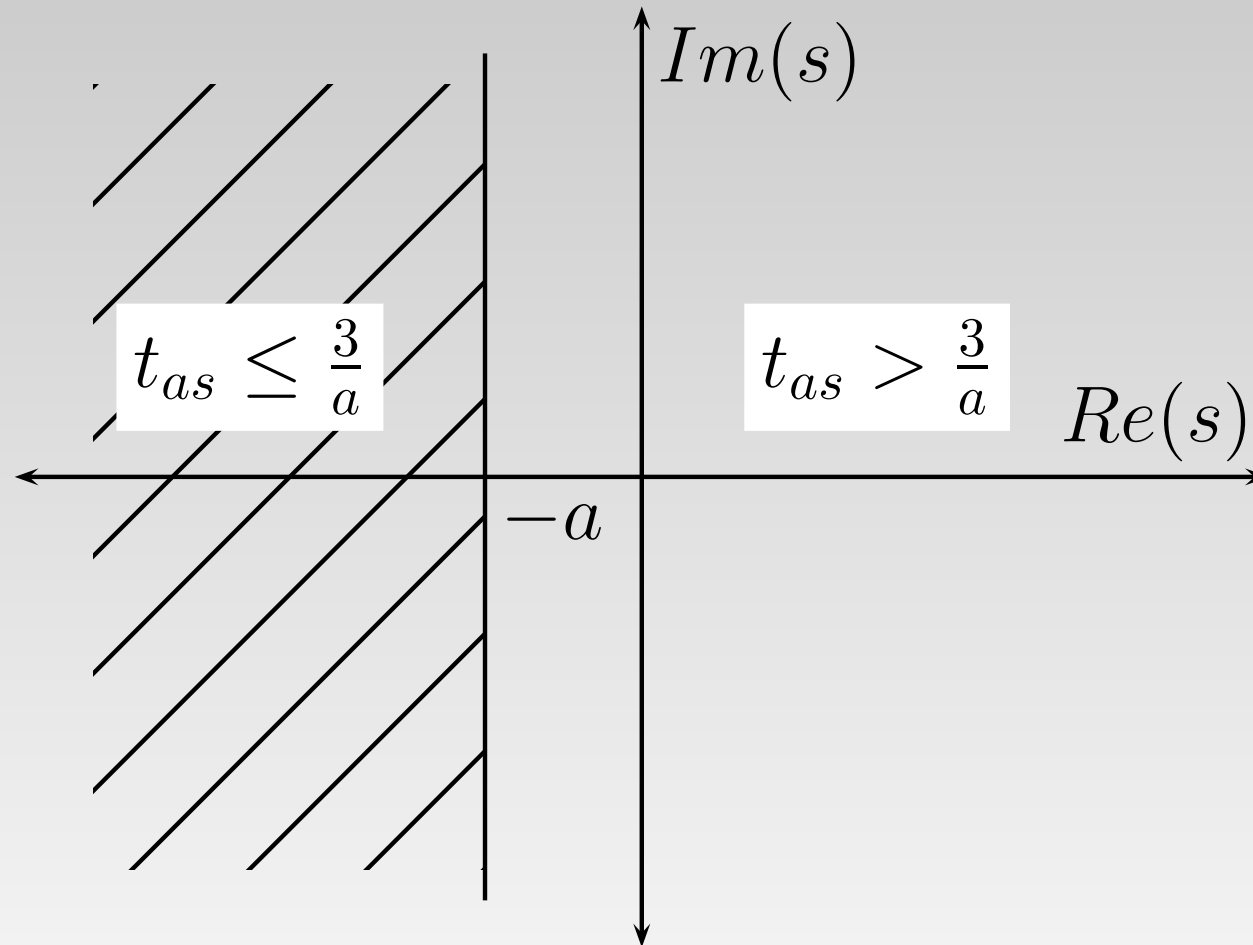


Figura 19: Región de Tiempo máximo de asentamiento para un sistema continuo de segundo orden

Frecuencia de Oscilación

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] \mu(t)$$

$$F(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2} = \xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

La Frecuencia de Oscilación es igual a la magnitud de la parte imaginaria de los polos de la Función de Transferencia

Frecuencia de Oscilación

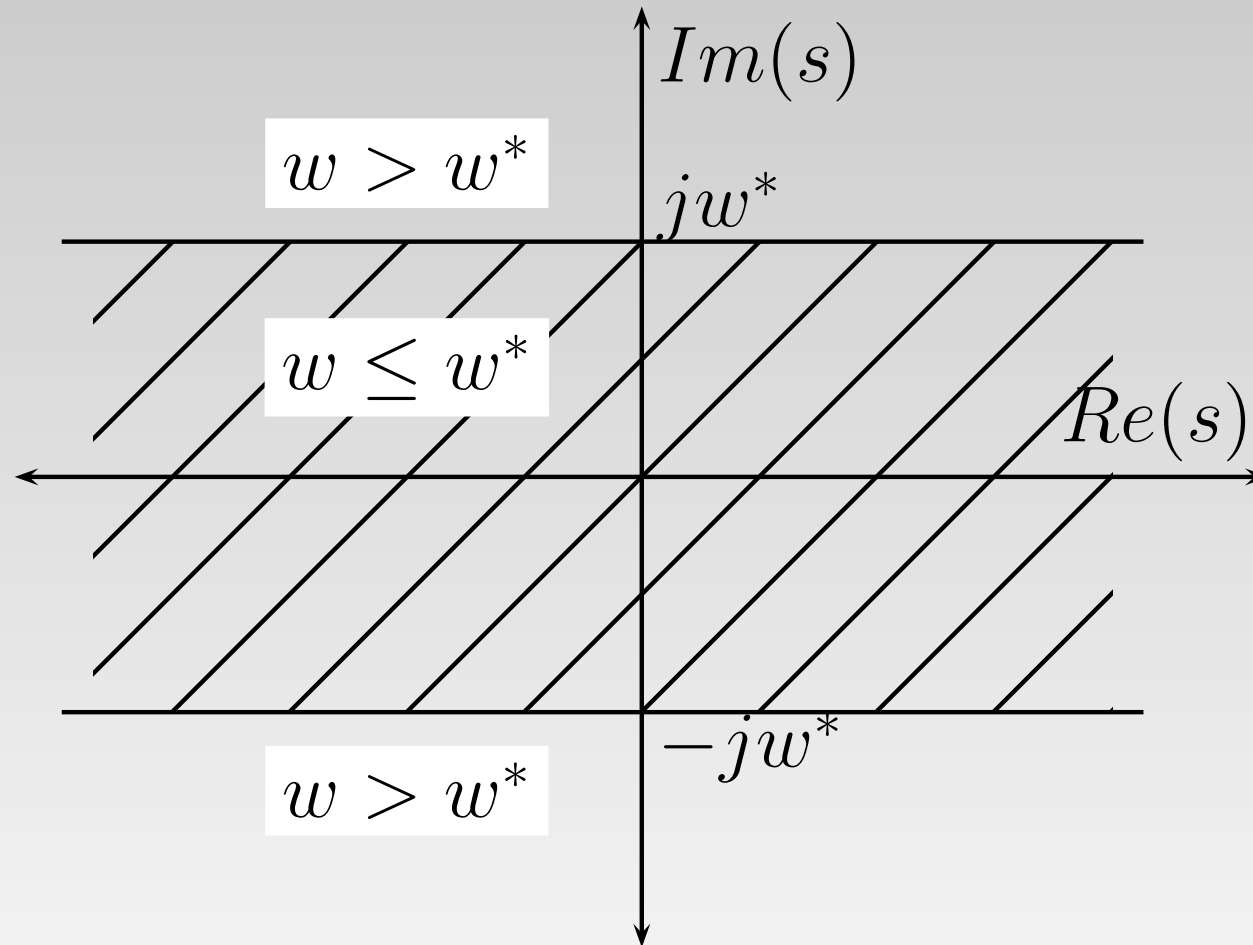


Figura 20: Región de Frecuencia máxima de oscilación para un sistema continuo de segundo orden

Sobrepico

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] \mu(t)$$

$$sp = \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}} * 100 \%$$

y_{max} : es el valor máximo de $y(t)$

y_{final} el valor final(estacionario) de $y(t)$.

Para calcular el sobrepico máximo, primero derivamos $y(t)$ e igualamos a cero para obtener los instantes t_c en los que suceden los máximos y mínimos de $y(t)$:

Sobrepico

$$0 = \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \times$$

$$\left[\begin{array}{l} -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi\right) + \\ \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi\right) \end{array} \right] = 0$$

$$\xi\omega_n \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi\right) = \\ \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi\right)$$

Sobrepico

$$\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \tan \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right)$$

$$\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Para obtener el valor de la arcotangente en la ecuación anterior, obsérvese en el plano complejo la ubicación de los polos. El valor de $\tan \phi$:

$$\tan \phi = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi \omega_n} = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Sobrepico

La función $\tan^{-1}(x)$ es periódica, de periodo π , por lo tanto

$$\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi\right) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \phi + n\pi$$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El sobrepico máximo sucede en t_c , que corresponde a $n = 1$:

$$t_c = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Sobrepico

El valor de $y(t)$ en t_c es el valor máximo de $y(t)$, es decir $y_{max} = y(t_c)$

$$y_{max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}} \times$$

$$\sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} + \phi \right)$$

$$y_{max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{\frac{-\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \sin(\pi + \phi)$$

Sobrepico

Dado que $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, podemos escribir

$$y_{max} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin(\phi)$$

$$y_{max} = 1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 + e^{-\pi \cot \phi}$$

El valor final de $y(t)$ es 1, por lo tanto

$$sp = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100 \% = e^{-\pi \cot \phi} 100 \%$$

Sobrepico

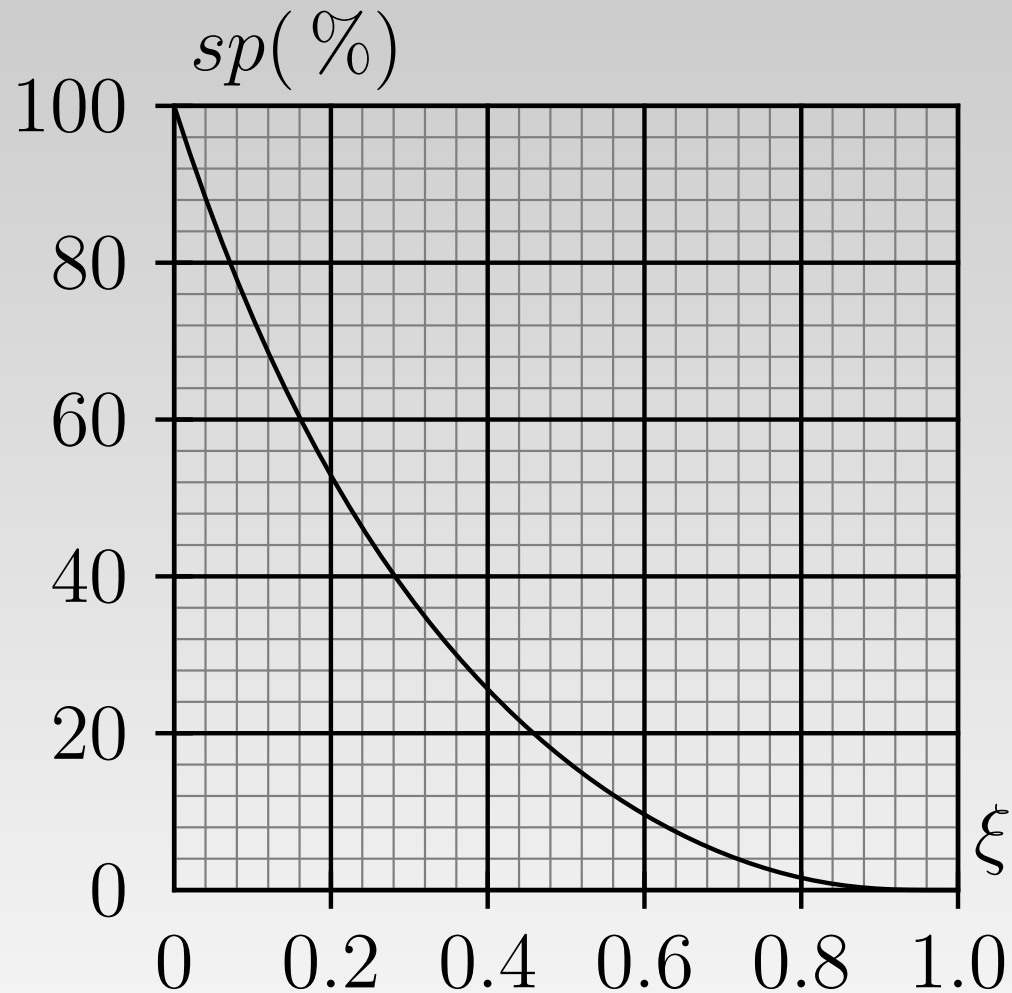


Figura 21: Sobrepico en función de ξ

Sobrepico

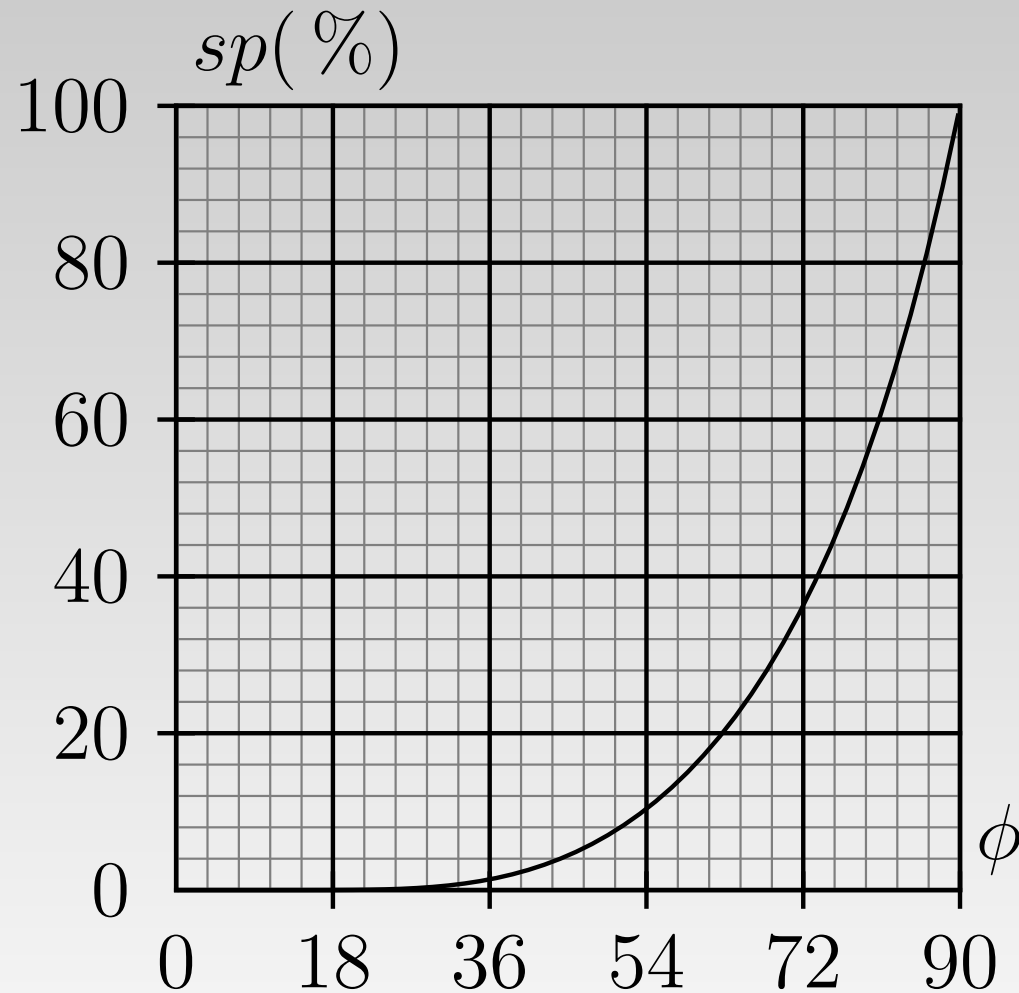


Figura 22: Sobrepico en función de ϕ

Sobrepico

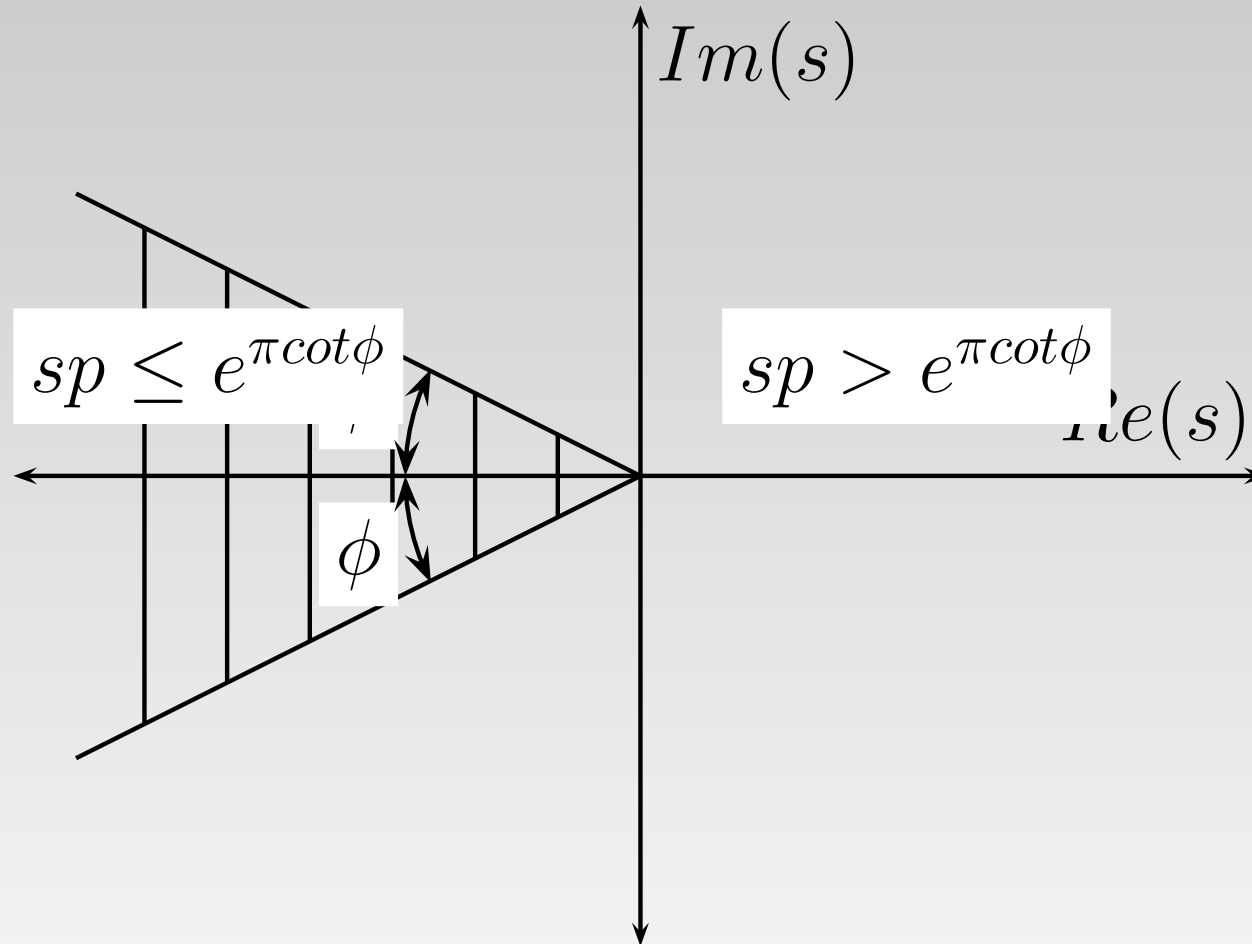


Figura 23: Región de Sobrepico máximo para un sistema continuo de segundo orden

Región de diseño

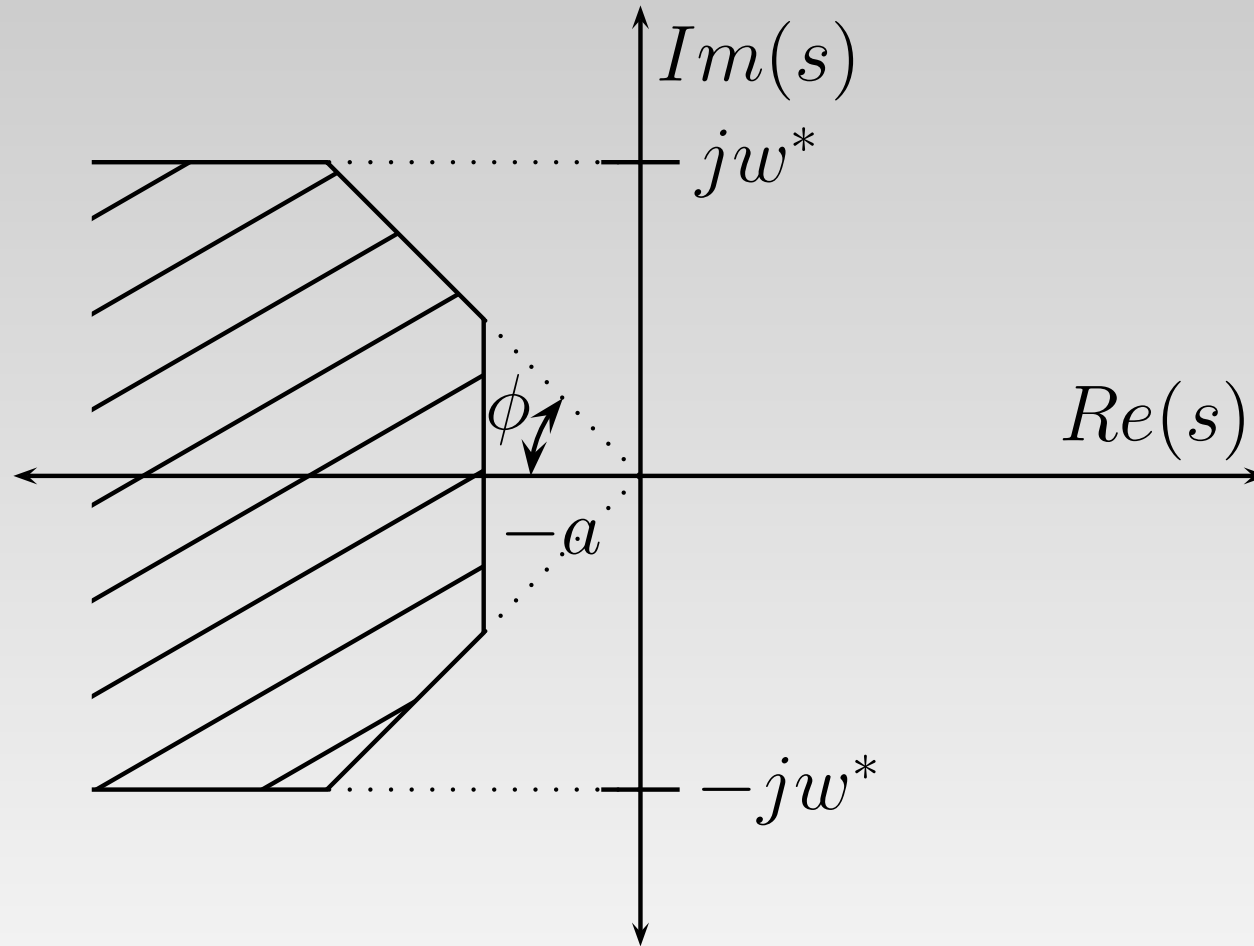


Figura 24: Región de Diseño para un sistema continuo de segundo orden

Región de diseño

- el sistema es estable
- el tiempo de asentamiento es menor o igual que $3/a$
- la frecuencia máxima de oscilación de la respuesta natural es w^*
- al estimularlo con un escalón unitario el sobrepico máximo es menor que $e^{-\pi \cot \phi} 100 \%$

Sistema Discreto. 2º Orden

Un sistema continuo de segundo orden, cuya función de transferencia es

$$F(z) = \frac{1 - 2b \cos a + b^2}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$$

Los polos de la función de transferencia serán:

$$p_{1,2} = \frac{2b \cos a \pm \sqrt{4b^2 \cos^2 a - 4b^2}}{2}$$

$$p_{1,2} = b \left(\cos a \pm \sqrt{\cos^2 a - 1} \right)$$

$$p_{1,2} = b \left(\cos a \pm j \sqrt{1 - \cos^2 a} \right) = b (\cos a \pm j \sin a)$$

Sistema Discreto. 2º Orden

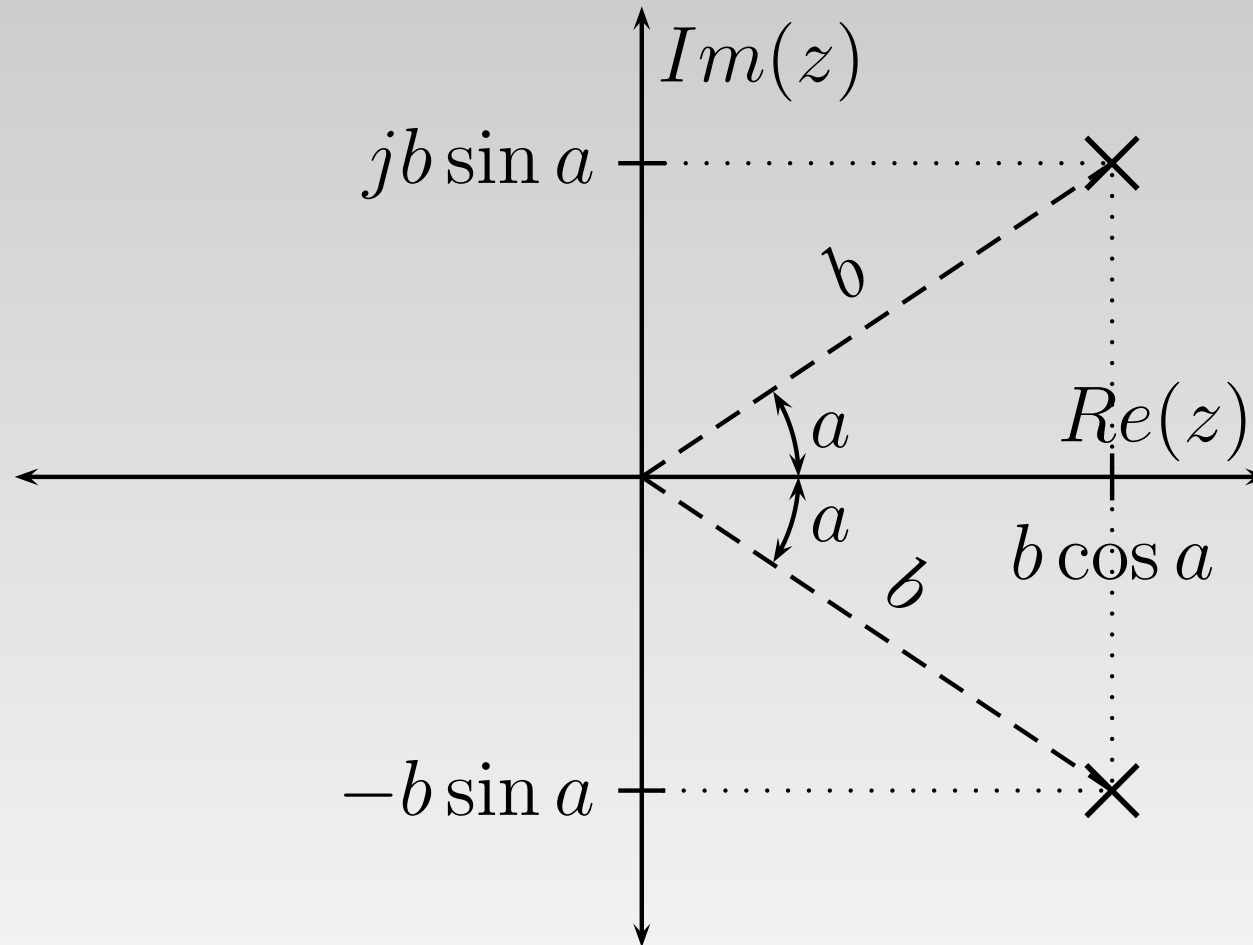


Figura 25: Ubicación de los polos de un sistema discreto de segundo orden, con polos complejos

Sistema Discreto. 2º Orden

Se estimula el sistema con un paso unitario $\mu(k)$,
(C.I. = 0), la respuesta $y(k)$ es:

$$Y(z) = \left(\frac{1 - 2b \cos a + b^2}{z^2 - 2bz \cos a + b^2} \right) \left(\frac{z}{z - 1} \right)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z - 1} + \frac{Bz + C}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$$

sumando e igualando coeficientes se obtiene

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = -1 + 2b \cos a$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z^2 + (1 - 2bz \cos a)}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$$

Sistema Discreto. 2º Orden

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - bz \cos a}{z^2 - 2bz \cos a + b^2} - \frac{z(1 - 2z \cos a)}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$$

$$y(k) = \left(1 - b^k \cos ak - \frac{(1 - b \cos a)}{b \sin a} b^k \sin ak \right) \mu(k)$$

$$y(k) = (1 - Cb^k \sin(ak + \phi)) \mu(k)$$

$$C = \frac{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos a}}{b \sin a} = \frac{1}{\sin \phi}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{b \sin a}{1 - b \cos a} \right)$$

Sistema Discreto. 2º Orden

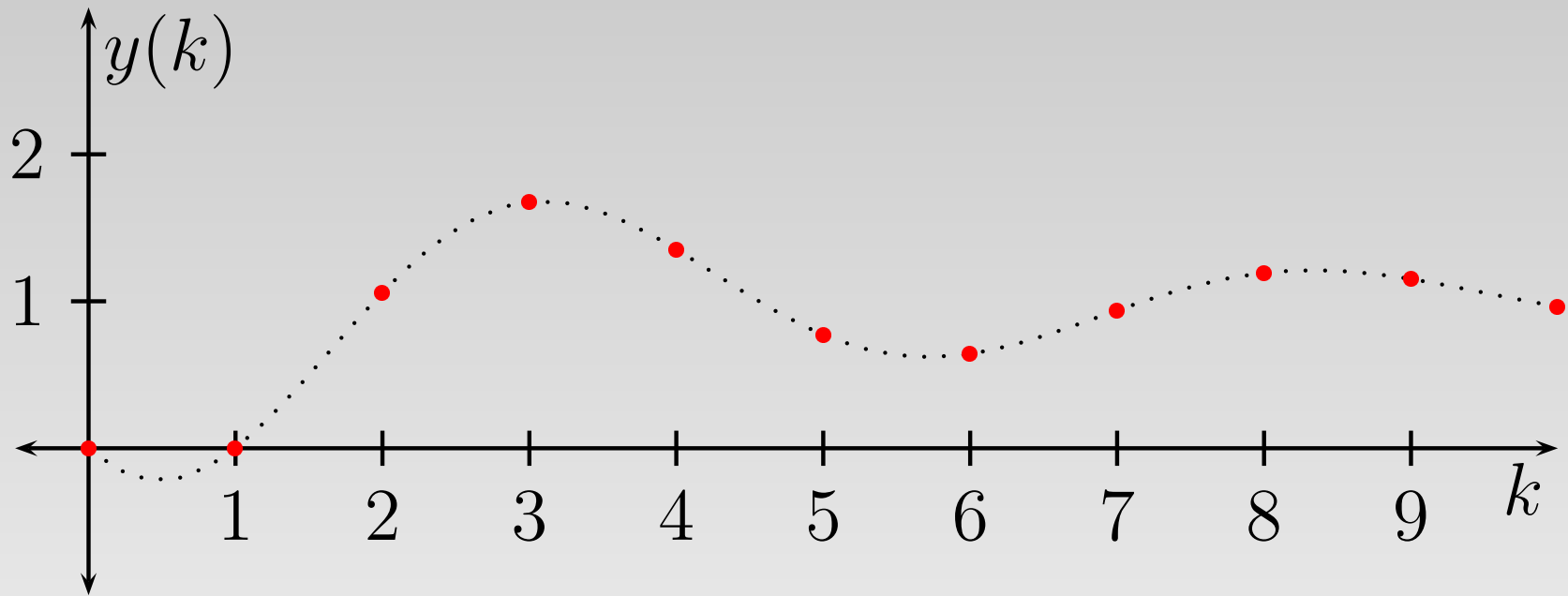


Figura 26: Respuesta al paso de un sistema discreto de segundo orden, $a = 1.2$, $b = 0.8$

Sistema Discreto. 2º Orden

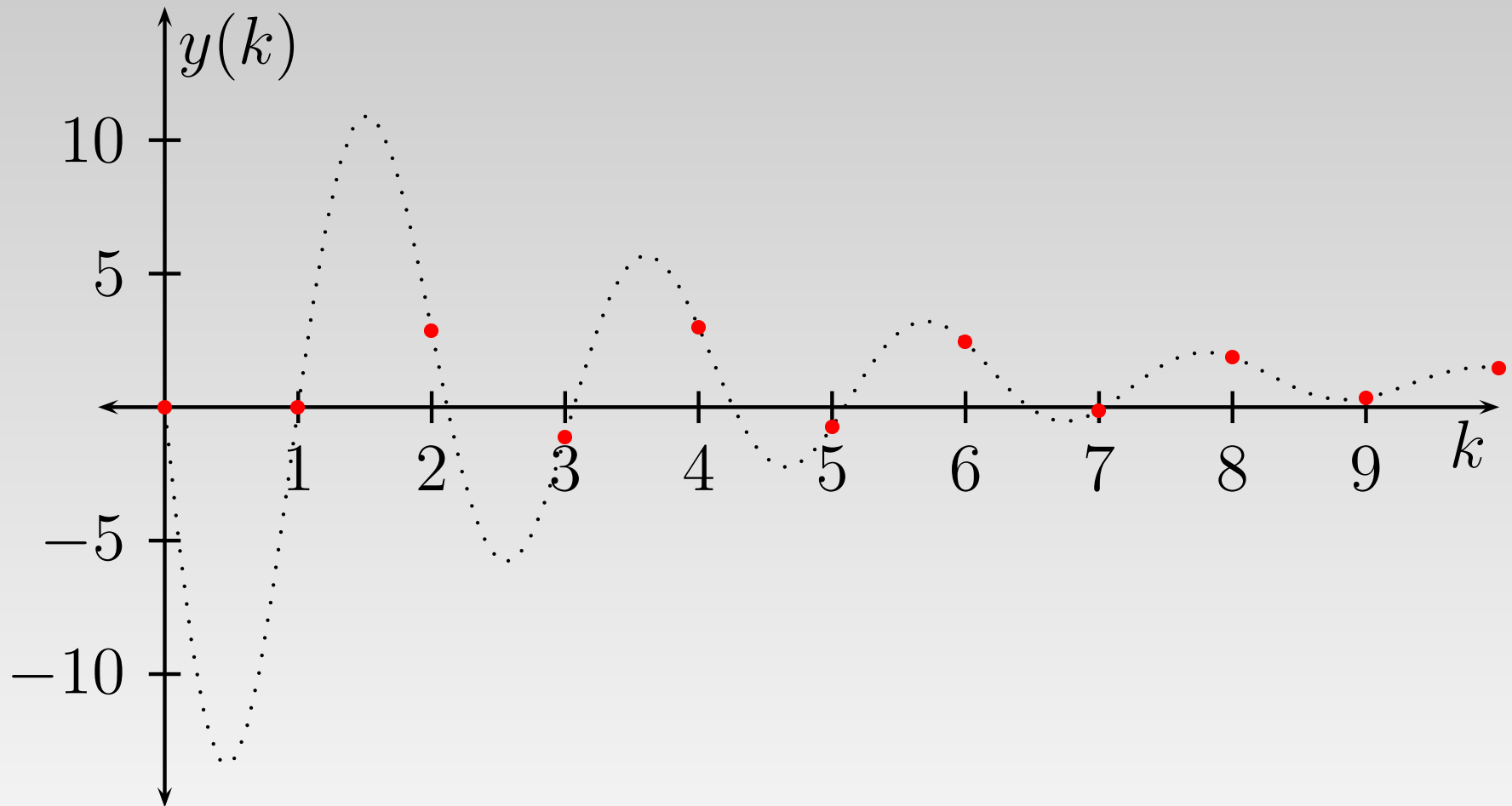


Figura 27: Respuesta al paso de un sistema discreto de segundo orden, $a = 3$, $b = 0.7$

Sistema Discreto. 2º Orden

Para estudiar la secuencia $y(k)$ podría suponerse el sistema continuo que genera. Los resultados no son exactos, pero dan una cota máxima;

$$y(k) = (1 - Cb^k \sin(ak + \phi)) \mu(k)$$

$$C = \frac{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos a}}{b \sin a} = \frac{1}{\sin \phi}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{b \sin a}{1 - b \cos a} \right)$$

$$y(t) = (1 - Cb^t \sin(at + \phi)) \mu(k)$$

Estabilidad

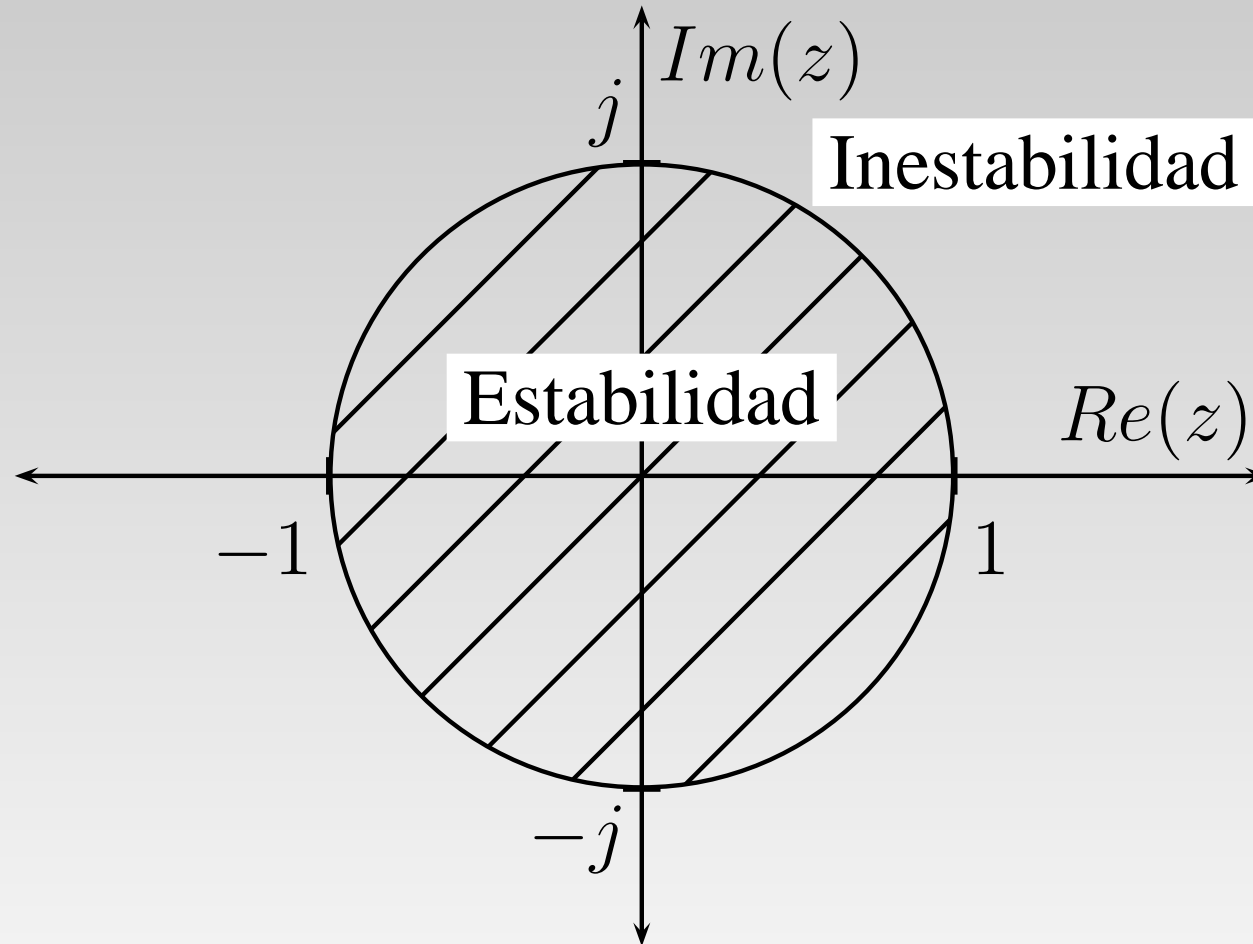


Figura 28: Región de Estabilidad para un sistema discreto de segundo orden

Tiempo de Asentamiento

Tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera el 5 % de su valor máximo

$$y(k) = (1 - Cb^k \sin(ak + \phi)) \mu(k)$$

$$b^{k_{as}} = 0.05 \quad \ln b^{k_{as}} = \ln 0.05 \quad k_{as} \ln b = \ln 0.05$$

b es la magnitud de los polos.

Tiempo de Asentamiento

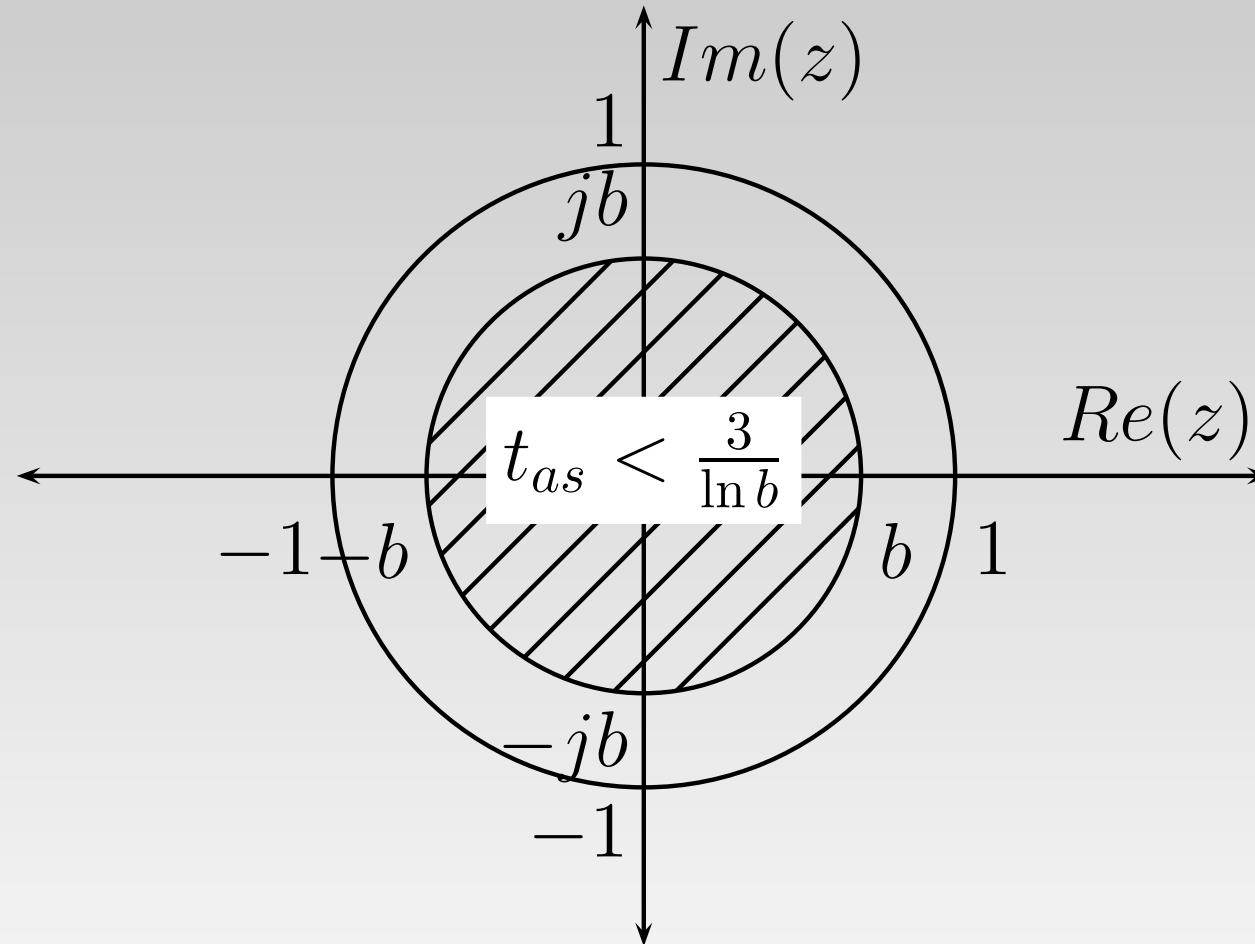


Figura 29: Región de tiempo de asentamiento máximo para un sistema discreto de segundo orden

Frecuencia de Oscilación

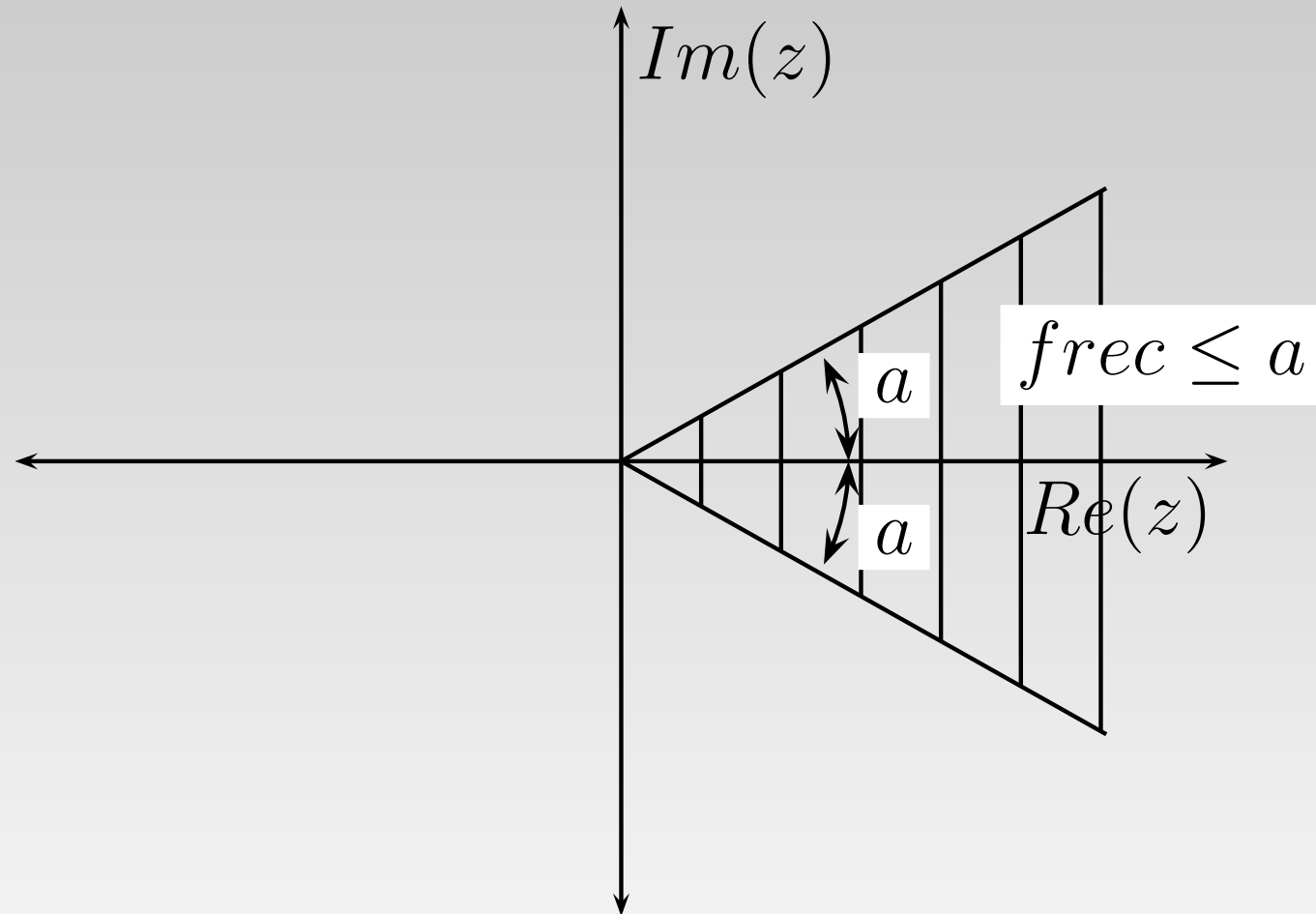


Figura 30: Región de Frecuencia máxima de oscilación para un sistema discreto de segundo orden

Sobrepico

$$y(k) = (1 - Cb^k \sin(ak + \phi)) \mu(k)$$

$$y(t) = \left(1 - Ce^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n(\sqrt{1 - \xi^2})t + \phi)\right) \mu(k)$$

Si reescribimos b^k como $(e^{\ln b})^k = e^{k \ln b}$, podemos asimilar los coeficientes de los exponentes y las sinusoides:

$$-\xi\omega_n = \ln b \quad \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = a$$

$$\frac{\ln b}{a} = -\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = -\cot \phi$$

$$b = e^{-a \cot \phi} = e^{-\frac{a\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

Sobrepico

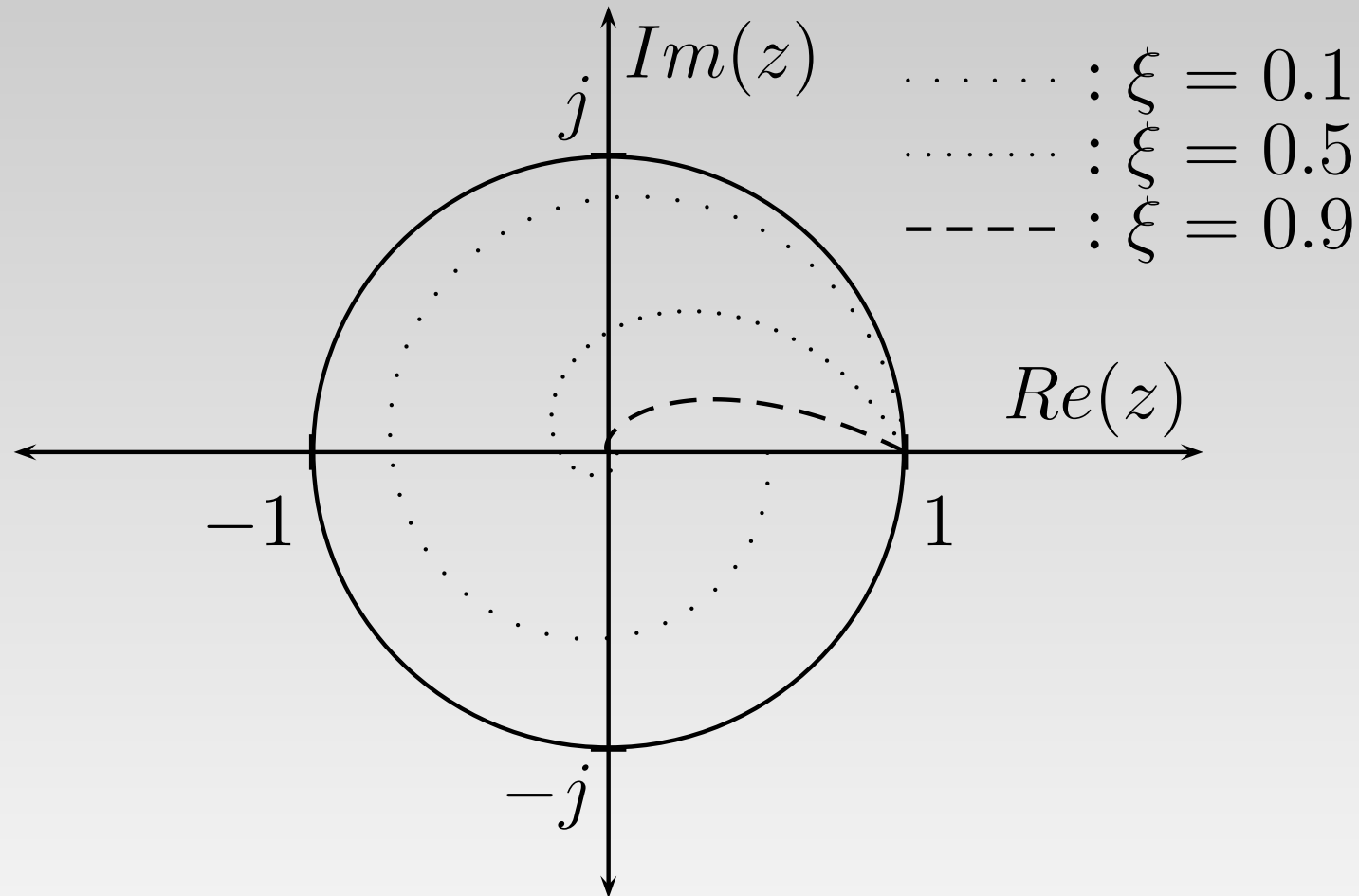


Figura 31: Curvas de Amortiguamiento fijo para un sistema discreto de segundo orden

Sobrepico

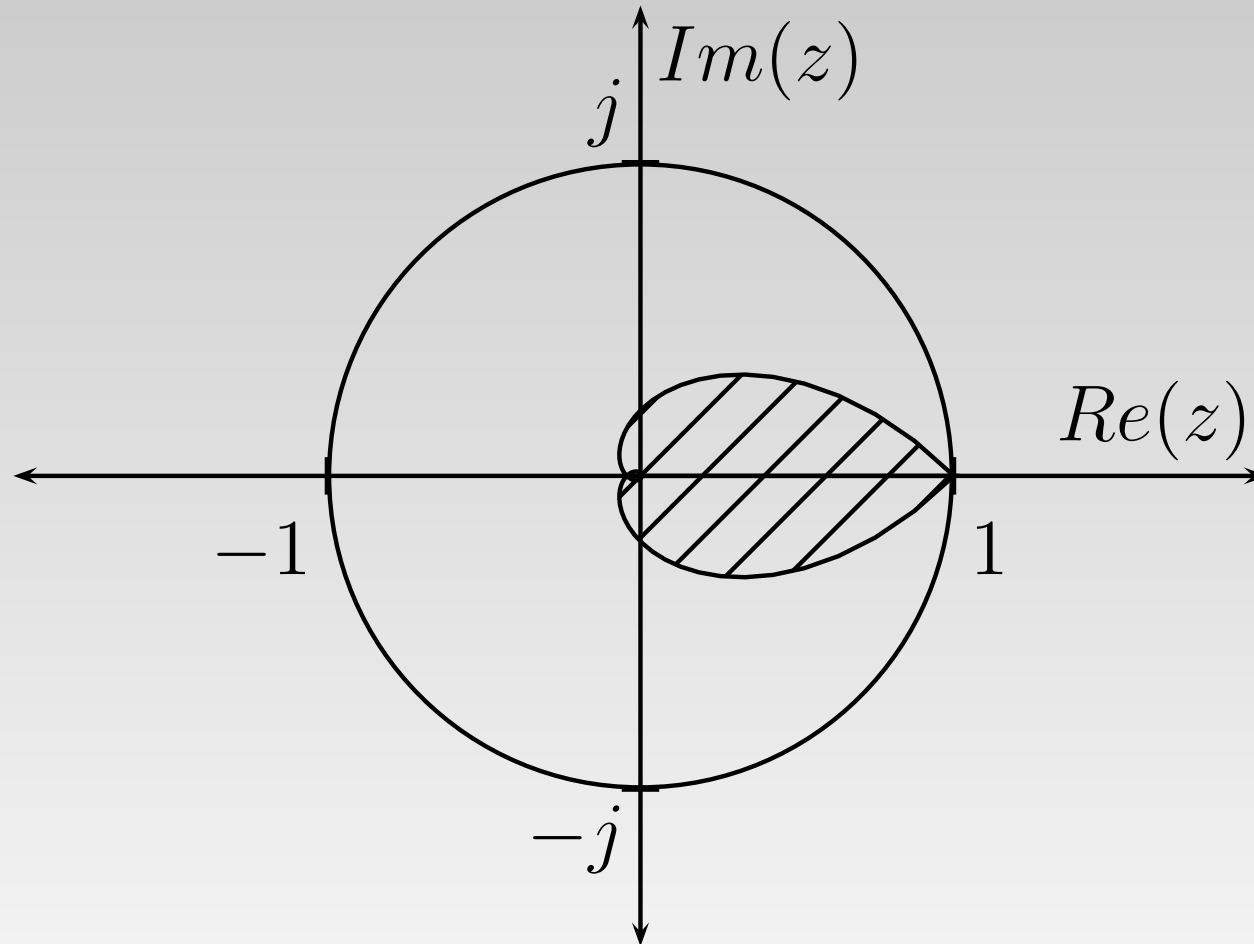


Figura 32: Región de Amortiguamiento mínimo para un sistema discreto de segundo orden

Región de Diseño

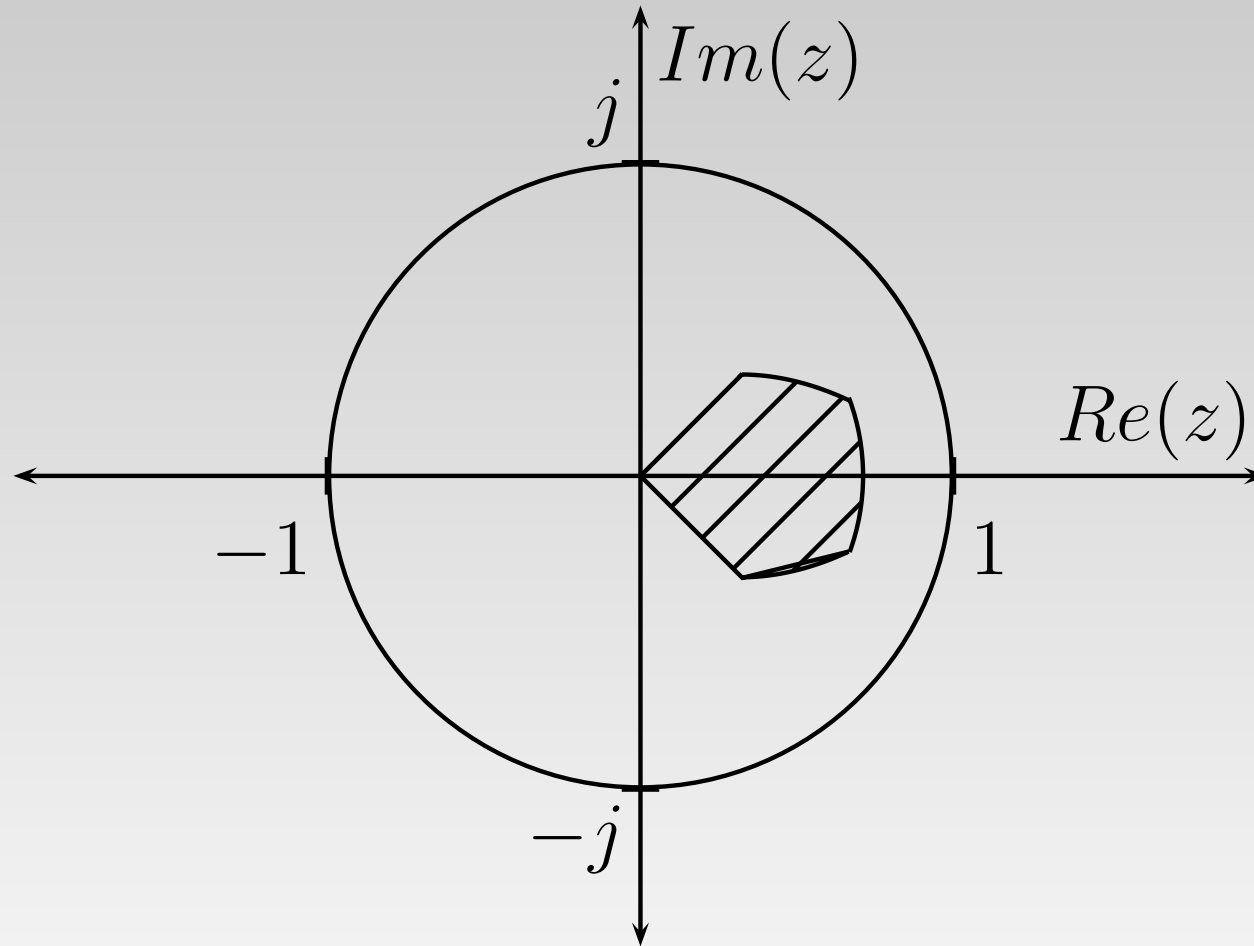


Figura 33: Región de Diseño para un sistema discreto de segundo orden

Efecto de los ceros

$$F(s) = \frac{\frac{(b^2 + \omega^2)}{a}(s + a)}{(s + b)^2 + \omega^2}$$

La respuesta al escalón es:

$$y(t) = 1 +$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{(b^2 + \omega^2)[(a - b)^2 + \omega^2]} e^{-bt} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{b} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a - b} \right)$$

Efecto de los ceros

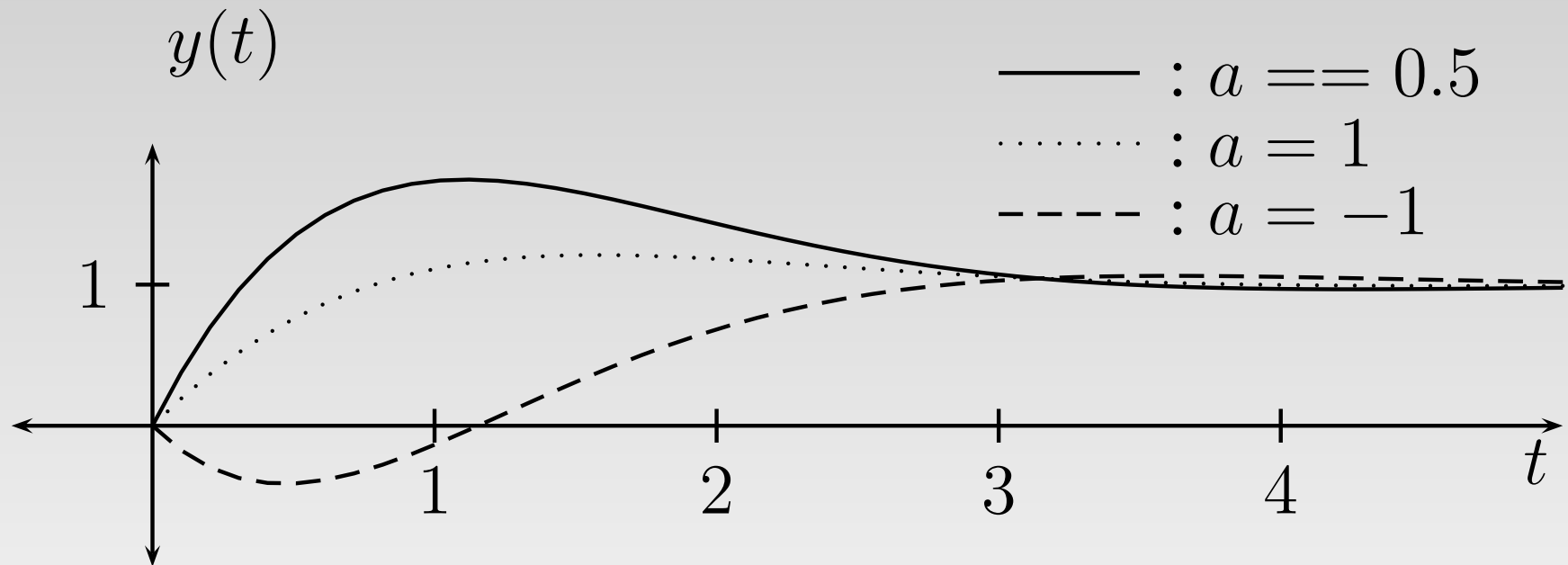


Figura 34: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, con cero real $b = \omega = 1$

Sistemas de Fase Mínima

Los sistemas que no poseen ceros en el semiplano derecho, se conocen como sistemas de *fase mínima*, o simplemente *minifase*

La presencia de subpicos ante una entrada escalón es fácil de demostrar para un sistema de segundo orden con polos reales y un cero real, tal como

$$F(s) = \frac{(s + a)}{(s + b)(s + c)}$$

Sistemas de Fase Mínima

La respuesta al escalón es:

$$y(t) = \left(\frac{a}{bc} + \frac{(a-b)}{(c-b)(-b)} e^{-bt} + \frac{(a-c)}{(c-b)(c)} e^{-ct} \right) \mu(t)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{a-c}{c-b} = \frac{c-b}{c-b} = 1$$

La derivada siempre es positiva, por lo tanto, para valores cercanos a $t = 0$, $y(t)$ será siempre positiva. Por otra parte, la respuesta de estado estacionario de $y(t)$ será a/bc ; para sistemas estables, tanto b como c son positivos, y por lo tanto el signo de la respuesta estacionaria es el mismo signo de a .

Polos Dominantes

$$F(s) = \frac{6.75s^3 + 102.5s^2 + 318.75s + 750}{(s + 10)(s + 15)(s^2 + 2s + 5)}$$

Al estimular ese sistema con un escalón unitario la respuesta será

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{6.75s^3 + 102.5s^2 + 318.75s + 750}{s(s + 10)(s + 15)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.25}{(s + 10)} - \frac{0.25}{(s + 15)} - \frac{0.5(s + 1)}{(s^2 + 2s + 5)}$$

$$y(t) = (1 - 0.25e^{-10t} - 0.25e^{-15t} - 0.5e^{-t} \cos 2t) \mu(t)$$

Polos Dominantes

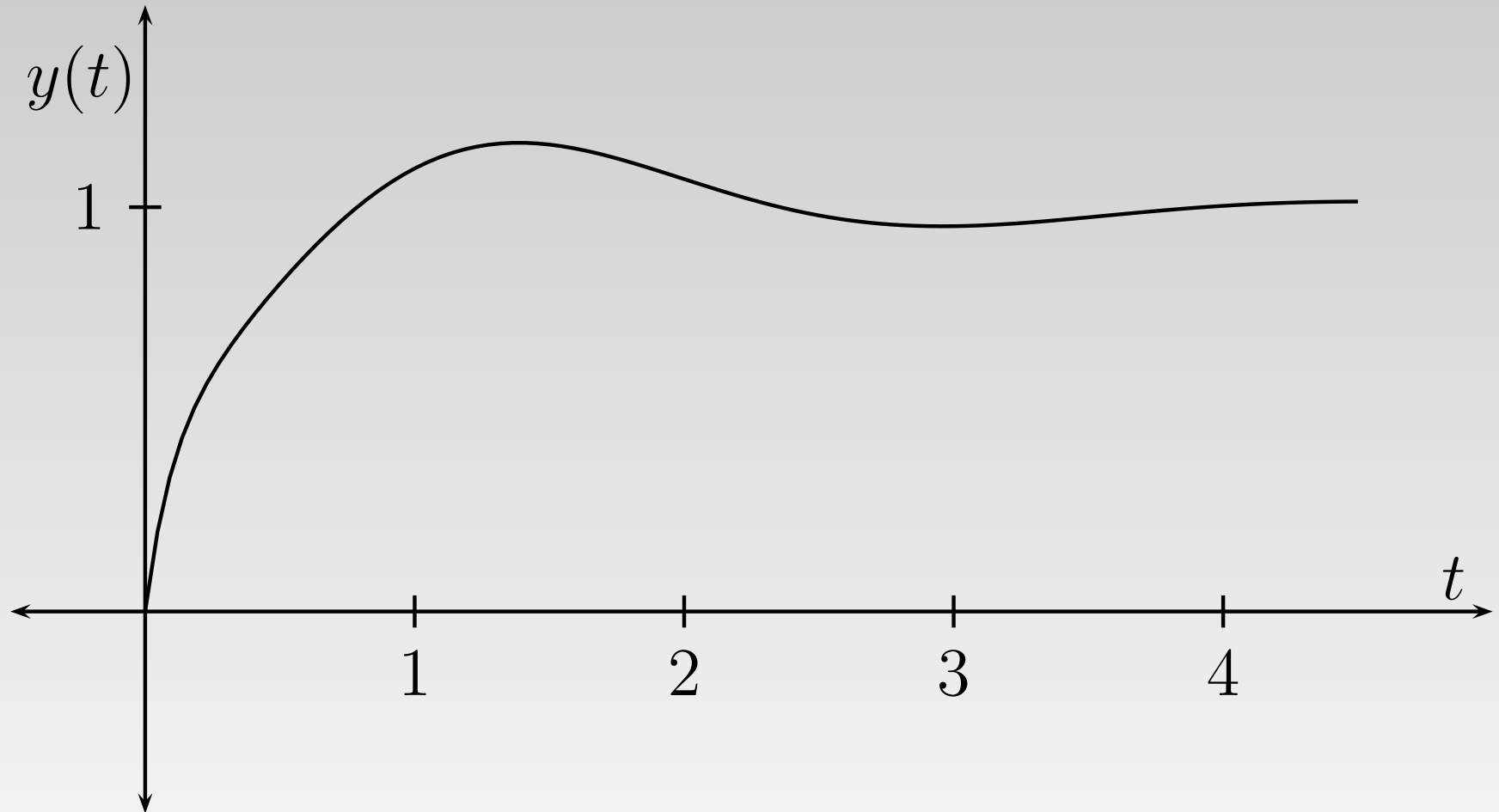


Figura 35: Respuesta al paso de un sistema continuo de orden 4

Polos Dominantes

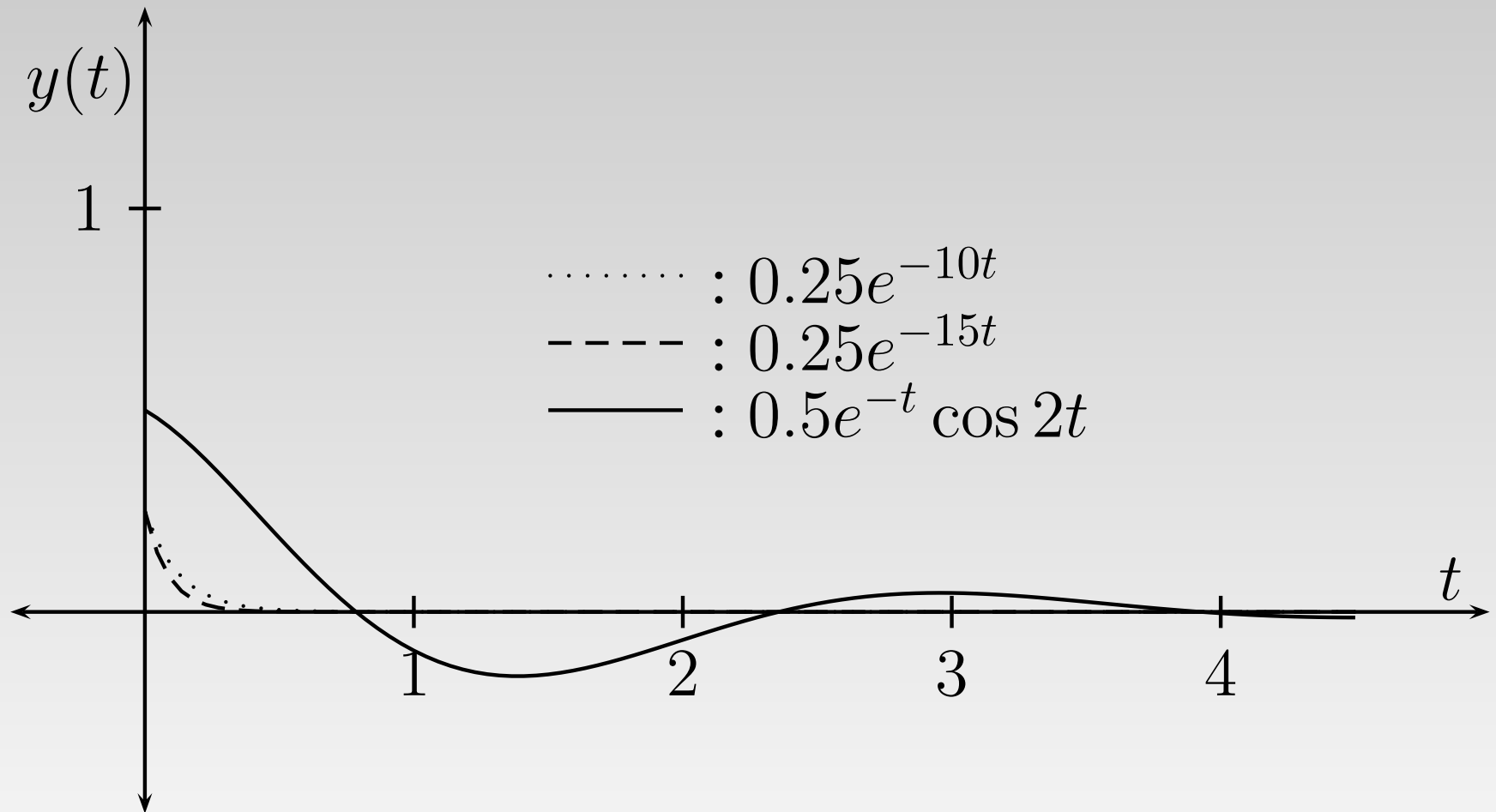


Figura 36: Componentes de la respuesta natural de un sistema continuo de orden 4

Polos Dominantes

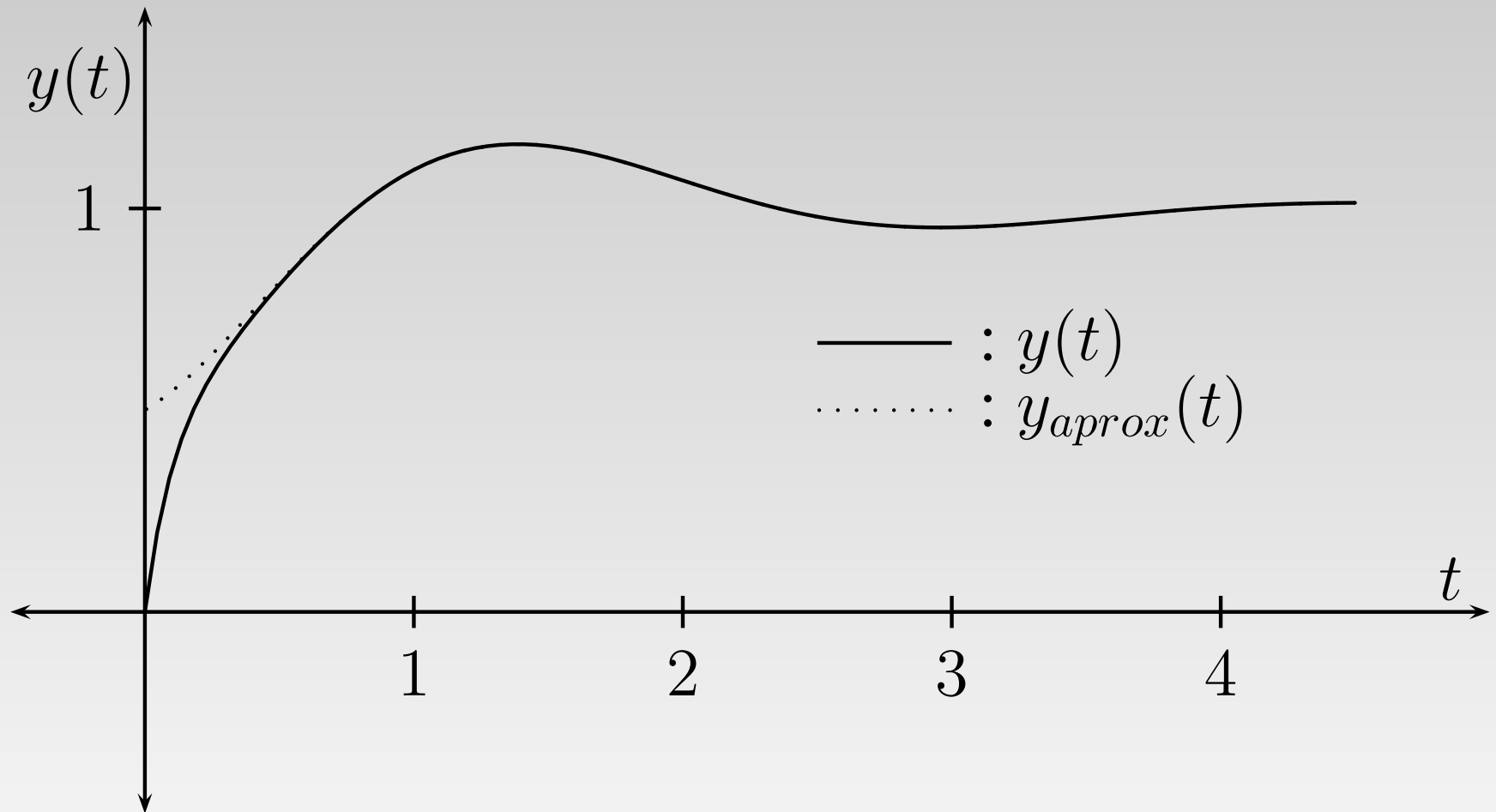


Figura 37: Respuesta exacta y aproximada en un sistema con polos dominantes

Polos Dominantes

Un sistema continuo (**discreto**) estable tiene (1 o 2) *polos dominantes* si la parte real (**la magnitud**) de dichos polos es suficientemente mayor que la de los demás polos del sistema, como para que el aporte de éstos últimos se desvanezca mucho antes de que haya desaparecido el aporte debido a los polos dominantes.

En estos casos, las regiones de diseño, que fueron desarrolladas para sistemas de segundo orden, pueden ser una herramienta muy útil para analizar el sistema, aunque éste sea de un orden superior.