# Ecuaciones Diferenciales y de Diferencia

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

# Ecuaciones Diferenciales

Igualdades que incluyen derivadas

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t)$$

# Ecuaciones Diferenciales

Igualdades que incluyen derivadas

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t)$$

La *solución* de una Ecuación Diferencial es una función $f(t)\ t \in R$

# Ecuaciones Diferenciales

Igualdades que incluyen derivadas

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t)$$

La *solución* de una Ecuación Diferencial es una función $f(t)$ $t \in R$

$$f_1(t) = e^{2t} \qquad f_2(t) = 2e^{2t} \qquad f_3(t) = 3e^{2t}$$

# Ecuaciones Diferenciales

Igualdades que incluyen derivadas

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t)$$

La *solución* de una Ecuación Diferencial es una función $f(t)\ t \in R$

$$f_1(t) = e^{2t} \qquad f_2(t) = 2e^{2t} \qquad f_3(t) = 3e^{2t}$$

Condiciones Auxiliares

$$f(0),\ \dot{f}(0),\ \ddot{f}(0),\ \dddot{f}(0),\ \cdots,\ f^{(n)}(0)$$

# Tiempo Discreto

La variable que mide el tiempo ($k$) varía discretamente .

- $k = 1, 2, 3, \cdots$

# Tiempo Discreto

La variable que mide el tiempo ($k$) varía discretamente .

- $k = 1, 2, 3, \cdots$
- $k = T, 2T, 3T, \cdots \quad T \in \mathbb{R}$

# Tiempo Discreto

La variable que mide el tiempo ($k$) varía discretamente .

- $k = 1, 2, 3, \cdots$
- $k = T, 2T, 3T, \cdots \quad T \in \mathbb{R}$
- $k = k_1, k_2, k_3, \cdots$

# Tiempo Discreto

La variable que mide el tiempo ($k$) varía discretamente .

- $k = 1, 2, 3, \cdots$
- $k = T, 2T, 3T, \cdots \quad T \in \mathbb{R}$
- $k = k_1, k_2, k_3, \cdots$

$$x(k) \qquad x(k+1) \qquad x(k-1)$$

# Ecuaciones de Diferencias

Igualdades que incluyen diferencias

$$x(k+1) = 2x(k)$$

# Ecuaciones de Diferencias

Igualdades que incluyen diferencias

$$x(k+1) = 2x(k)$$

La *solución* de una Ecuación Diferencial es una función $f(k)$ $k \in Z$

# Ecuaciones de Diferencias

Igualdades que incluyen diferencias

$$x(k+1) = 2x(k)$$

La *solución* de una Ecuación Diferencial es una función $f(k)\ k \in Z$

$$f_1(k) = 2^k \qquad f_2(k) = 2(2^k) \qquad f_3(k) = 3(2^k)$$

# Ecuaciones de Diferencias

Igualdades que incluyen diferencias

$$x(k+1) = 2x(k)$$

La *solución* de una Ecuación Diferencial es una función $f(k)\ k \in Z$

$$f_1(k) = 2^k \qquad f_2(k) = 2(2^k) \qquad f_3(k) = 3(2^k)$$

Condiciones Auxiliares

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,f(n)$$

# Comparación

| ***Ecuaciones Diferenciales*** | ***Ecuaciones de Diferencia*** |
|---|---|
| derivadas | diferencias finitas. |
| $t \in \mathbb{R}$ | $k \in \mathbb{Z}$. |
| $f(t)\ t \in \mathbb{R}$ | $f(k)\ k \in \mathbb{Z}$ |
| C.I. $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \cdots$ | C.I. $y(0), y(1), y(2), \cdots$ |

# ED Lineales. Coeficientes constantes

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{du^m}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

# ED Lineales. Coeficientes constantes

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$b_m \frac{du^m}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

$$a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) =$$
$$b_m u(k+m) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

# Métodos de solución de E.D. Lineales

La solución de una E.D. lineal tiene dos componentes:

$$y_{completa}(t) = y_{homog\acute{e}nea}(t) + y_{particular}(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

# Métodos de solución de E.D. Lineales

La solución de una E.D. lineal tiene dos componentes:

$$y_{completa}(t) = y_{homogénea}(t) + y_{particular}(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

En el caso discreto

$$y_{completa}(k) = y_{homogénea}(k) + y_{particular}(k)$$

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

# Un Procedimiento “tortuoso”

1. Obtener la solución homogénea; aparecen coeficientes desconocidos

# Un Procedimiento "tortuoso"

1. Obtener la solución homogénea; aparecen coeficientes desconocidos
2. Obtener una solución particular $y_p(\cdot)$.

# Un Procedimiento “tortuoso”

1. Obtener la solución homogénea; aparecen coeficientes desconocidos

2. Obtener una solución particular $y_p(\cdot)$.

3. Construir la respuesta completa $y(\cdot) = y_h(\cdot) + y_p(\cdot)$, remplazar las condiciones iniciales, y obtener los coeficientes desconocidos

# La solución de la homogénea

La ecuación homogénea está igualada a $0$

# La solución de la homogénea

La ecuación homogénea está igualada a $0$

1. Se escribe el polinomio característico de la ecuación $a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

# La solución de la homogénea

La ecuación homogénea está igualada a $0$

1. Se escribe el polinomio característico de la ecuación $a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$
2. Se obtienen las raíces $\lambda_i$ del polinomio característico

# La solución de la homogénea

La ecuación homogénea está igualada a $0$

1. Se escribe el polinomio característico de la ecuación $a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$
2. Se obtienen las raíces $\lambda_i$ del polinomio característico
3. Continuo: $y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$

# La solución de la homogénea

La ecuación homogénea está igualada a $0$

1. Se escribe el polinomio característico de la ecuación $a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$
2. Se obtienen las raíces $\lambda_i$ del polinomio característico
3. Continuo: $y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$
4. Discreto: $y_h(k) = c_1\lambda_1^k + \cdots + c_n\lambda_n^k$

# La solución particular

Generalmente se procede “probando” una solución similar a la función de entrada, $u(t)$.

Funciones simples como escalones, polinomios, exponenciales, sinusoides.

# Un Ejemplo

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t)$$

# Un Ejemplo

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t)$$

$$f(t) = t^2 + 5t + 3 \quad \text{C.I: } y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 3$$

# Un Ejemplo

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t)$$

$f(t) = t^2 + 5t + 3$ C.I: $y(0) = 2$ $\dot{y}(0) = 3$

El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

# Un Ejemplo

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t)$$

$f(t) = t^2 + 5t + 3$ C.I: $y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 3$

El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

Raíces : $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$

# Un Ejemplo

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t)$$

$f(t) = t^2 + 5t + 3$ C.I: $y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 3$

El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

Raíces : $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

# Un Ejemplo

Una solución particular:

# Un Ejemplo

Una solución particular: $f(t)$ es un polinomio de grado 2, probamos:

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

# Un Ejemplo

Una solución particular: $f(t)$ es un polinomio de grado 2, probamos:

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Calculamos :

$$\dot{y}_p(t) = 2\beta_2 t + \beta_1 \quad \ddot{y}_p(t) = 2\beta_2 \quad \dot{f}(t) = 2t + 5$$

# Un Ejemplo

Una solución particular: $f(t)$ es un polinomio de grado 2, probamos:

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Calculamos :

$$\dot{y}_p(t) = 2\beta_2 t + \beta_1 \quad \ddot{y}_p(t) = 2\beta_2 \quad \dot{f}(t) = 2t + 5$$

Remplazamos en la E.D.:

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5$$

# Un Ejemplo

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5$$

# Un Ejemplo

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5$$

$$2\beta_2 t^2 + (6\beta_2 + 2\beta_1)t + (2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0) = 2t + 5$$

# Un Ejemplo

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5$$

$$2\beta_2 t^2 + (6\beta_2 + 2\beta_1)t + (2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0) = 2t + 5$$

Igualamos coeficientes

$$\begin{aligned} 2\beta_2 &= 0 \\ 6\beta_2 + 2\beta_1 &= 2 \\ 2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0 &= 5 \end{aligned}$$

# Un Ejemplo

Igualamos coeficientes

$$\begin{cases} 2\beta_2 & = 0 \\ 6\beta_2 + 2\beta_1 & = 2 \\ 2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0 & = 5 \end{cases}$$

# Un Ejemplo

Igualamos coeficientes

$$\begin{cases} 2\beta_2 & = 0 \\ 6\beta_2 + 2\beta_1 & = 2 \\ 2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0 & = 5 \end{cases}$$

$$\beta_2 = 0 \quad \beta_1 = 1 \quad \beta_0 = 1$$

# Un Ejemplo

Igualamos coeficientes

$$\begin{cases} 2\beta_2 & = 0 \\ 6\beta_2 + 2\beta_1 & = 2 \\ 2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0 & = 5 \end{cases}$$

$$\beta_2 = 0 \quad \beta_1 = 1 \quad \beta_0 = 1$$

$$y_p(t) = t + 1$$

# Un Ejemplo

La respuesta completa es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + t + 1$$

y su primera derivada es:

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + 1$$

# Un Ejemplo

En $t = 0$ se evalúan C.I.

$$y(0) = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} + 0 + 1 = c_1 + c_2 + 1 = 2$$

$$\dot{y}(0) = -c_1 e^{-0} - 2c_2 e^{-0} + 1 = -c_1 - 2c_2 + 1 = 3$$

# Un Ejemplo

En $t = 0$ se evalúan C.I.

$$y(0) = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} + 0 + 1 = c_1 + c_2 + 1 = 2$$

$$\dot{y}(0) = -c_1 e^{-0} - 2c_2 e^{-0} + 1 = -c_1 - 2c_2 + 1 = 3$$

$$c_1 = 4 \quad c_2 = -3$$

# Un Ejemplo

En $t = 0$ se evalúan C.I.

$$y(0) = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} + 0 + 1 = c_1 + c_2 + 1 = 2$$

$$\dot{y}(0) = -c_1 e^{-0} - 2c_2 e^{-0} + 1 = -c_1 - 2c_2 + 1 = 3$$

$$c_1 = 4 \quad c_2 = -3$$

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1$$

# Un algoritmo para E. de Diferencias

$$2y(k+2) - 3y(k+1) + y(k) = f(k)$$

# Un algoritmo para E. de Diferencias

$$2y(k+2) - 3y(k+1) + y(k) = f(k)$$

$f(k) = k^2$ **C.I.** $y(0) = 2 \quad y(1) = 1$

# Un algoritmo para E. de Diferencias

$$2y(k+2) - 3y(k+1) + y(k) = f(k)$$

$f(k) = k^2$ C.I. $y(0) = 2$ $y(1) = 1$

despejamos la diferencia de orden mayor

$$y(k+2) = \frac{1}{2}\left(f(k) + 3y(k+1) - y(k)\right)$$

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y(0) = 2$ | $y(1) = 1$ | $y(2) =??$ |

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y(0) = 2$ | $y(1) = 1$ | $y(2) = ??$ |

$$y(k+2) = \frac{1}{2}\left(f(k) + 3y(k+1) - y(k)\right)$$

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y(0)=2$ | $y(1)=1$ | $y(2)=1/2$ |

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y(0)=2$ | $y(1)=1$ | $y(2)=1/2$ |
| $1$ | $1$ | $y(1)=1$ | $y(2)=1/2$ | $y(3)=3/4$ |
| | | | | |

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y(0) = 2$ | $y(1) = 1$ | $y(2) = 1/2$ |
| $1$ | $1$ | $y(1) = 1$ | $y(2) = 1/2$ | $y(3) = 3/4$ |
| $2$ | $4$ | $y(2) = 1/2$ | $y(3) = 3/4$ | $y(3) = 23/8$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

# Un algoritmo para E. de Diferencias

| $k$ | $k^2$ | $y(k)$ | $y(k+1)$ | $y(k+2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y(0) = 2$ | $y(1) = 1$ | $y(2) = 1/2$ |
| $1$ | $1$ | $y(1) = 1$ | $y(2) = 1/2$ | $y(3) = 3/4$ |
| $2$ | $4$ | $y(2) = 1/2$ | $y(3) = 3/4$ | $y(3) = 23/8$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

# Un Procedimiento “elegante”

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.

# Un Procedimiento “elegante”

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.

2. Despejar la transformada de la función desconocida.

# Un Procedimiento “elegante”

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.

2. Despejar la transformada de la función desconocida.

3. Aplicar la transformada inversa (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a la función desconocida.

# Transformadas

$$
\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, shift left, "\mathcal{L}"] & F(s) \arrow[l, shift left, "\mathcal{L}^{-1}"] \\
\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Transformada de Laplace

# Transformadas

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Figura 2: Transformada de Laplace

$$f(k) \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} F(z)$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Figura 2: Transformada $\mathcal{Z}$

# Transformadas

$$f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

# Transformadas

$$f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}\left\{f(k)\right\} = \sum_{k=0}^\infty f(k)z^{-k}$$

# Transformadas

$$f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}\left\{f(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

T. Bilaterales, R.O.C.

# Propiedades. Linealidad

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{af(t)\right\} = aF(s)$$

# Propiedades. Linealidad

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{af(t)\right\} = aF(s)$$

$$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) + f_2(k)\right\} = F_1(z) + F_2(z)$$

$$\mathcal{Z}\left\{af(k)\right\} = aF(z)$$

# Propiedades. Diferencias

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+)$$

# Propiedades. Diferencias

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{Z}\left\{f(k+1)\right\} = zF(z) - zf(0)$$

# Propiedades. Diferencias

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s)$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0^+)$$

# Propiedades. Diferencias

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s)$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0^+)$$

$$\mathcal{Z}\left\{f(k+n)\right\} = z^n F(z)$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i} f(i)$$

# Propiedades. Convolución

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

# Propiedades. Convolución

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = F_1(z)F_2(z)$$

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)f_2(h-k)$$

# Propiedades. Desplazamiento y Escalamiento

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

# Propiedades. Desplazamiento y Escalamiento

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^{k}f(t)\right\} = F(z/a)$$

# Propiedades. Desplazamiento y Escalamiento

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^{k}f(t)\right\} = F(z/a)$$

Y otras propiedades semejantes...

# Parejas Elementales

| Laplace | | $\mathcal{Z}$ | |
|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(k)$ | $F(z)$ |
| $\mu(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\mu(k)$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | $a^k$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin ak$ | $\frac{z \sin a}{z^2-2z\cos a+1}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos ak$ | $\frac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$ |

# Parejas Elementales

| Laplace | | $\mathcal{Z}$ | |
|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(k)$ | $F(z)$ |
| $e^{\sigma t}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$ | $b^k\sin ak$ | $\frac{zb\sin a}{z^2-2bz\cos a+b^2}$ |
| $e^{\sigma t}\cos\omega t$ | $\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$ | $b^k\cos ak$ | $\frac{z^2-zb\cos a}{z^2-2bz\cos a+b^2}$ |

# Comparación

- Son fraccciones de polinomios en la variable compleja ($s$ o $z$).

# Comparación

- Son fraccciones de polinomios en la variable compleja ($s$ o $z$).
- En funciones análogas el orden del denominador es el mismo. En el numerador el orden difiere en $1$

# Comparación

- Son fraccciones de polinomios en la variable compleja ($s$ o $z$).
- En funciones análogas el orden del denominador es el mismo. En el numerador el orden difiere en $1$
- Los polos determinan el tipo de función en el dominio del tiempo.

# Comparación

- Son fraccciones de polinomios en la variable compleja ($s$ o $z$).
- En funciones análogas el orden del denominador es el mismo. En el numerador el orden difiere en $1$
- Los polos determinan el tipo de función en el dominio del tiempo.
- Polos repetidos

# Escalón

$$f(t) = \mu(t) \qquad\qquad F(s) = \frac{1}{s}$$

Polo en el origen

# Escalón

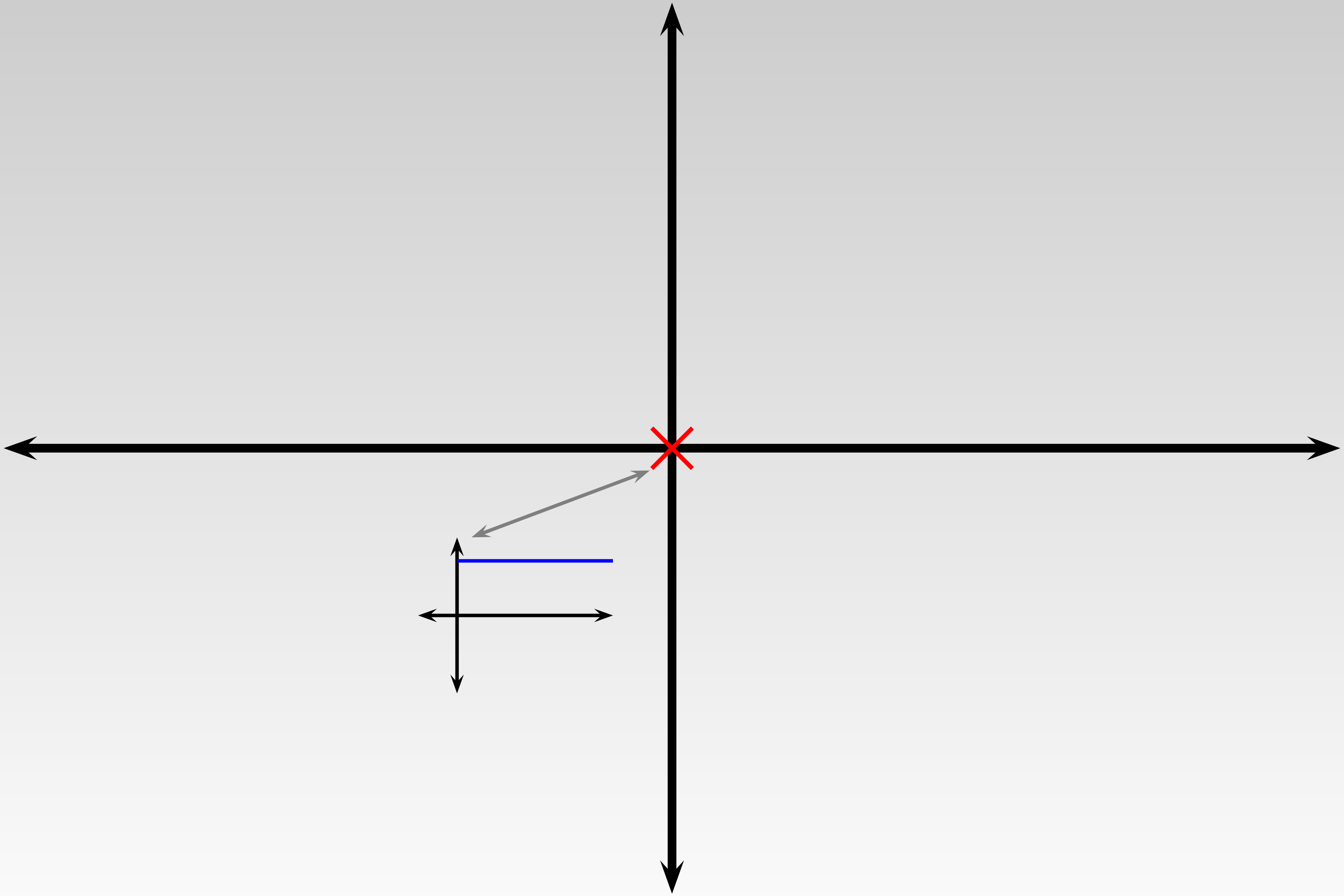
$$f(t) = \mu(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s}$$

Polo en el origen

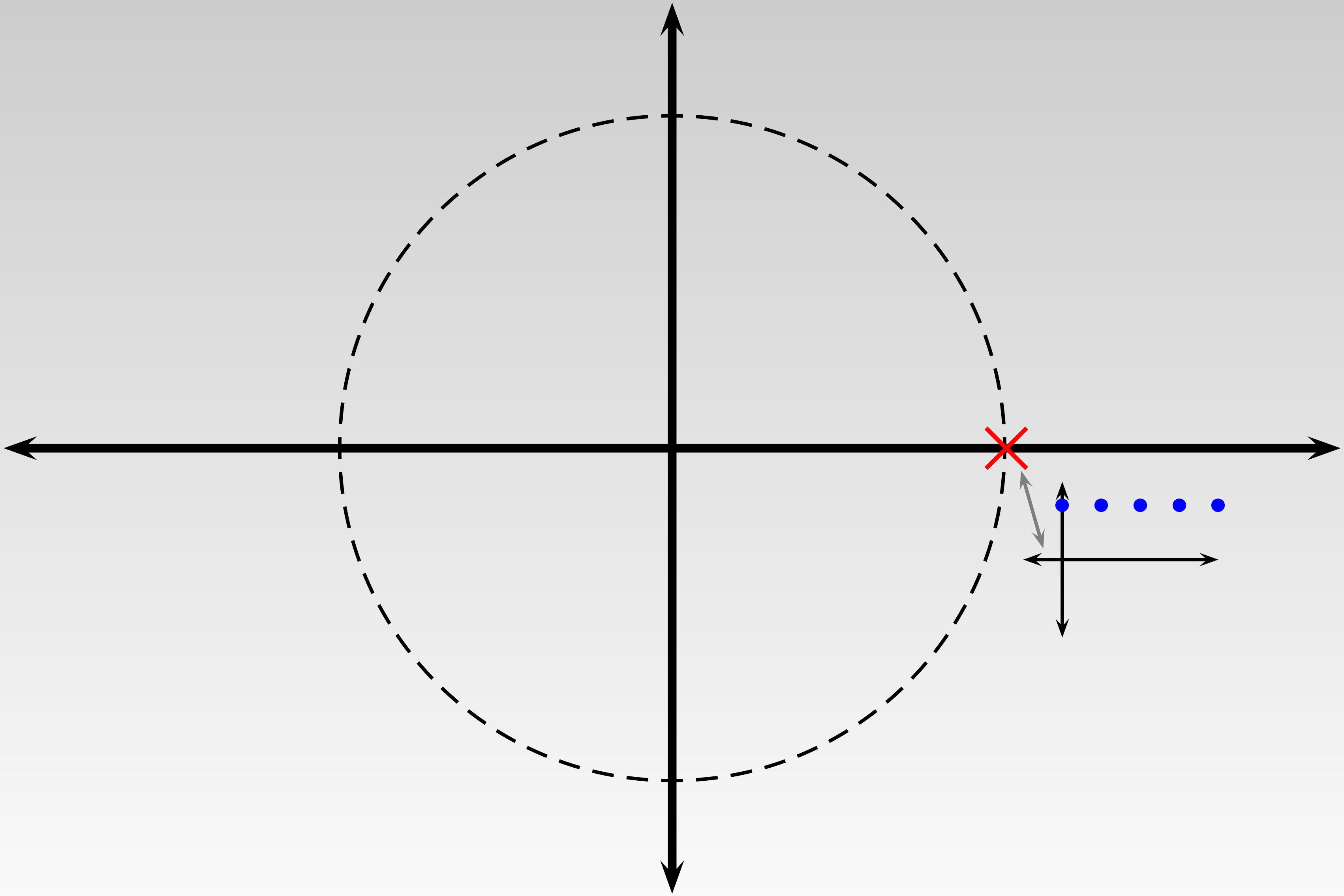
$$f(k) = \mu(k) \qquad F(z) = \frac{z}{z-1}$$

Polo en $(1, 0)$

# Escalón continuo



# Escalón discreto



# Exponenciales y series geométricas

$$f(t) = e^{at} \qquad F(s) = \frac{1}{s-a}$$

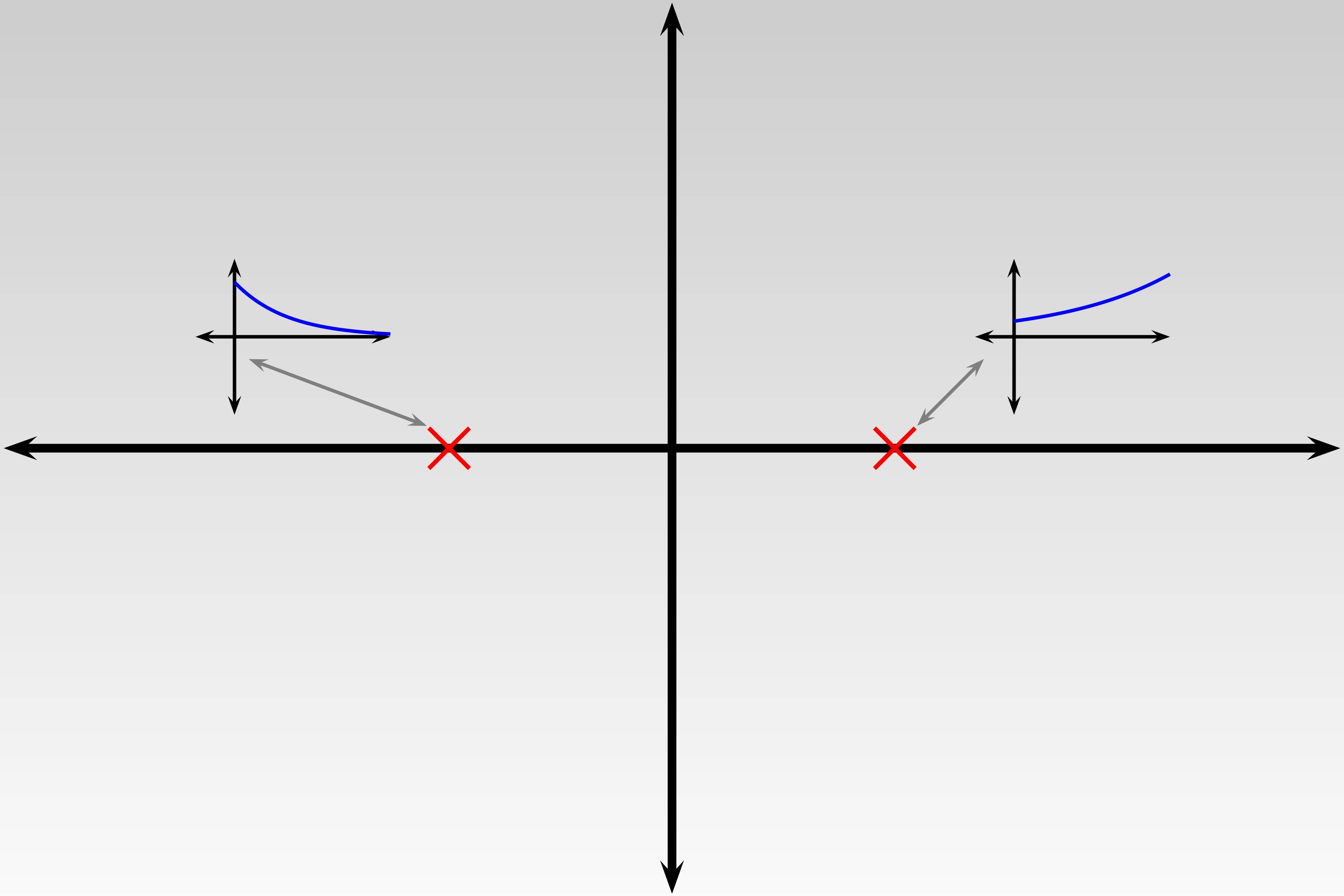
# Exponenciales y series geométricas

$$f(t) = e^{at} \qquad F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$a > 0$ creciente. Ej: $e^{2t}$

$a < 0$ decreciente. Ej: $e^{-2t}$

# Exponenciales



# Exponenciales y series geométricas

$$f(k) = a^k \qquad F(s) = \frac{z}{z-a}$$

# Exponenciales y series geométricas

$$f(k) = a^k \qquad F(s) = \frac{z}{z-a}$$

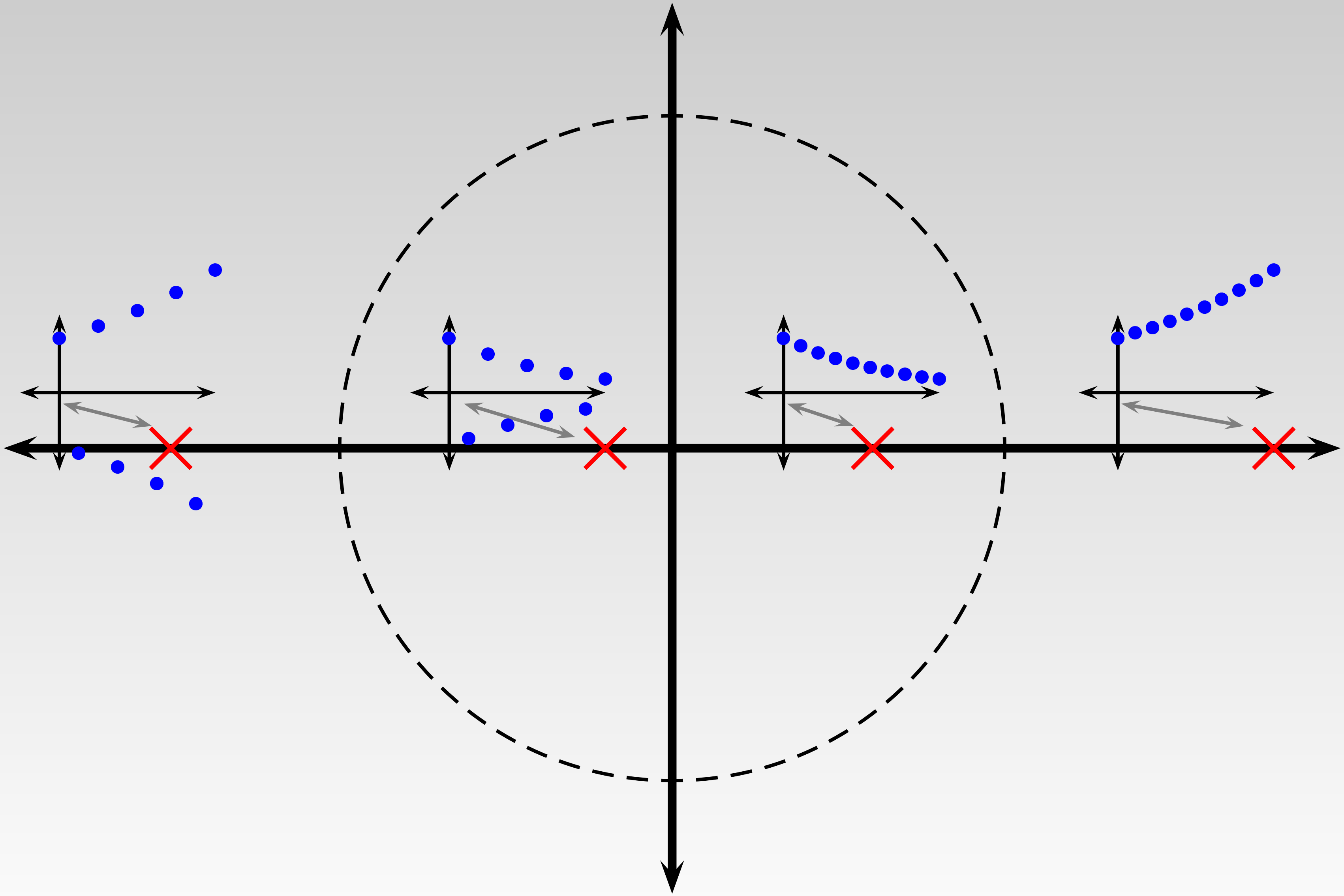
$$0 < a < 1 \text{ decreciente. Ej: } \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$1 < a \text{ creciente. Ej: } 2^k$$

$$-1 < a < 0 \text{ decreciente alternante. Ej: } \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$a < -1 \text{ creciente alternante. Ej: } 2^k$$

# Series Geométricas



# Sinusoidales

$$f(t) = \sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

# Sinusoidales

$$f(t) = \sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Polos imaginarios puros $\pm j\omega$

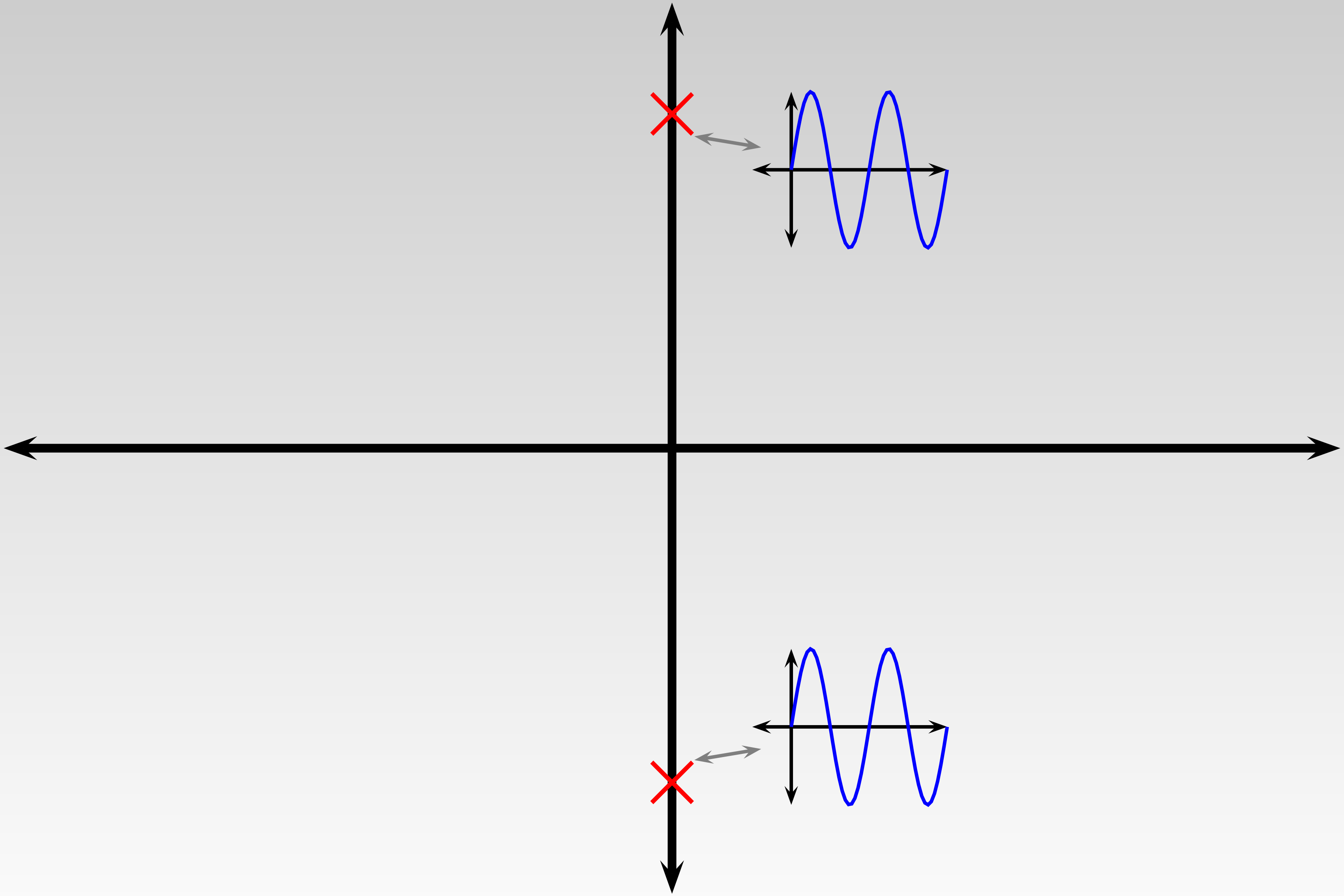
# Sinusoidales

$$f(t) = \sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Polos imaginarios puros $\pm j\omega$

Un resultado similar para $\cos(\omega t)$

# Sinusoides



# Sinusoidales

$$f(k) = \sin(ak) \qquad F(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}$$

# Sinusoidales

$$f(k) = \sin(ak) \qquad F(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}$$

Polos complejos de magnitud $1$:

$$p_{1,2} = \cos a \pm j \sin a$$

$$p_{1,2} = 1\underline{|a}$$

# Sinusoidales

$$f(k) = \sin(ak) \qquad F(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$$

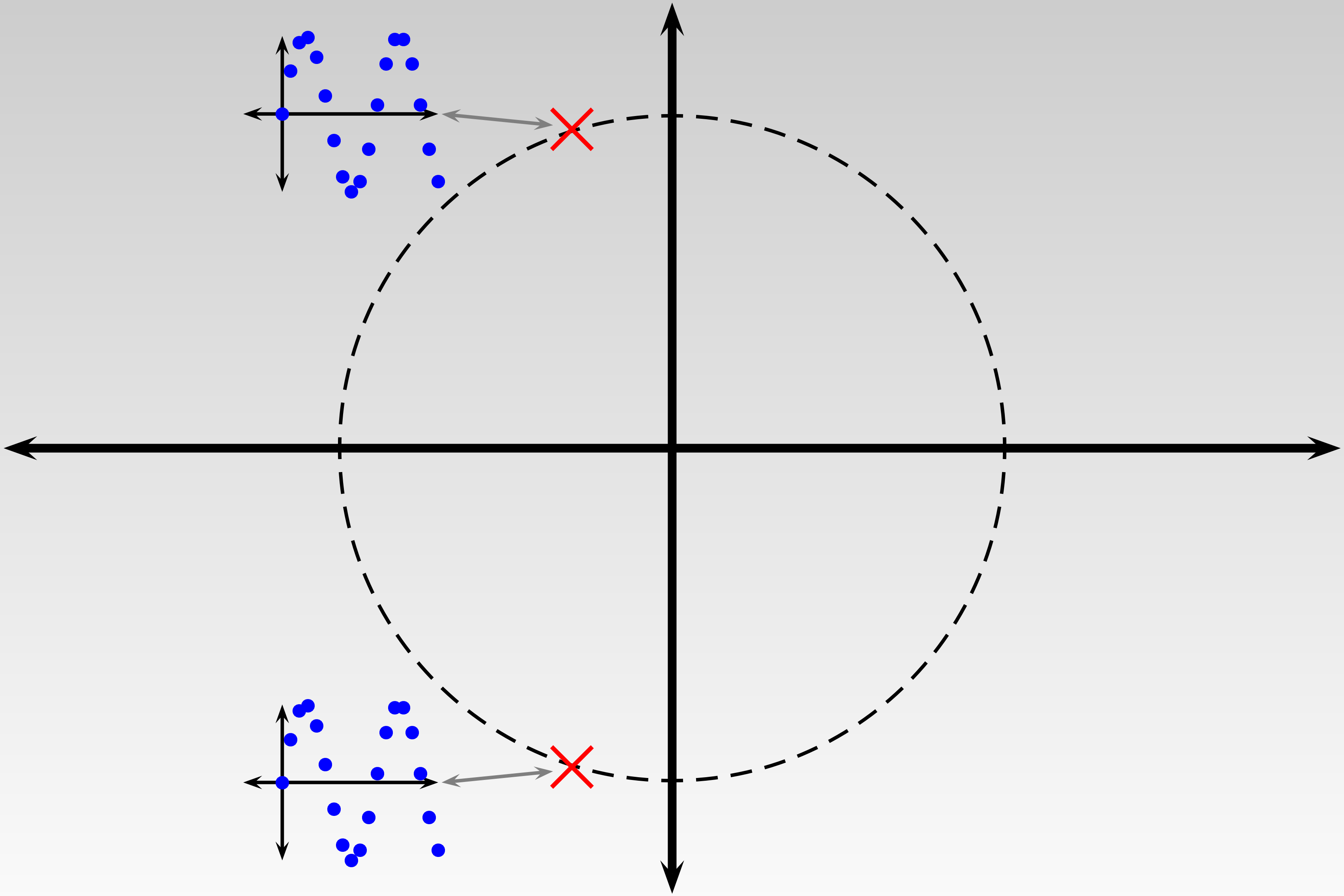
Polos complejos de magnitud $1$:

$$p_{1,2} = \cos a \pm j \sin a$$

$$p_{1,2} = 1\underline{\lfloor a}$$

Un resultado similar para $\cos(ak)$

# Series Geométricas



# Sinusoides por exponenciales

$$f(t) = e^{\sigma t}\sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

# Sinusoides por exponenciales

$$f(t) = e^{\sigma t}\sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

Polos complejos:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

$$Re(p_{1,2}) = \sigma \qquad Im(p_{1,2}) = j\omega$$

# Sinusoides por exponenciales

$$f(t) = e^{\sigma t} \sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

Polos complejos:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

$$Re(p_{1,2}) = \sigma \qquad Im(p_{1,2}) = j\omega$$

Crece o decrece según $\sigma$

# Sinusoides por exponenciales

$$f(t) = e^{\sigma t} \sin(\omega t) \qquad F(s) = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

Polos complejos:

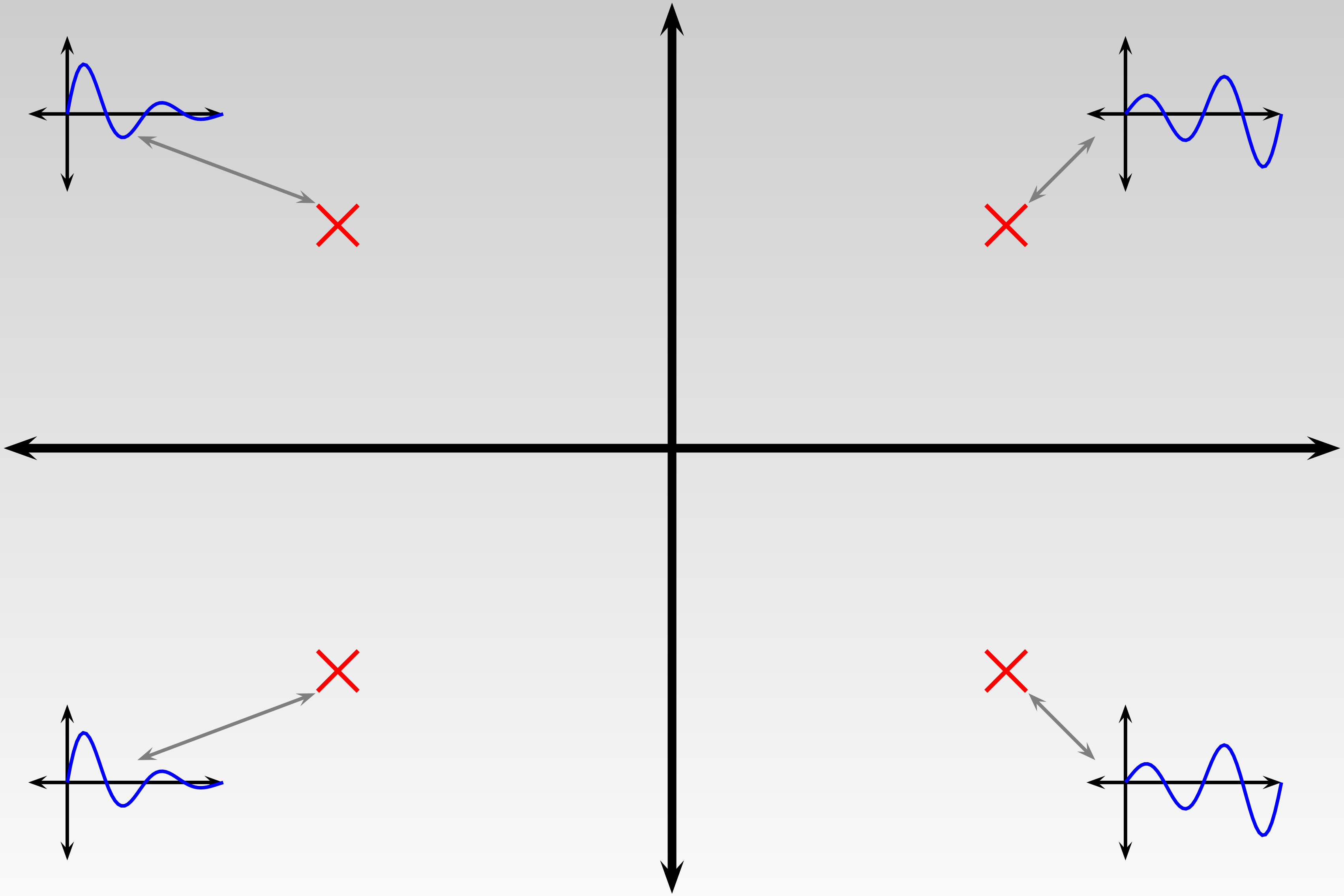
$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

$$Re(p_{1,2}) = \sigma \qquad Im(p_{1,2}) = j\omega$$

Crece o decrece según $\sigma$

Un resultado similar para $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$

# Sinusoides por exponenciales



# Sinusoidales por series geométricas

$$f(k) = b^k \sin(ak) \quad F(z) = \frac{zb\sin a}{z^2 - 2bz\cos a + b^2}$$

## Sinusoidales por series geométricas

$$f(k) = b^k \sin(ak) \qquad F(z) = \frac{zb\sin a}{z^2 - 2bz\cos a + b^2}$$

Polos complejos de magnitud $b$:

$$p_{1,2} = b\cos a \pm jb\sin a$$

$$p_{1,2} = b\underline{\lfloor a}$$

# Sinusoidales por series geométricas

$$f(k) = b^k \sin(ak) \qquad F(z) = \frac{zb \sin a}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$$

Polos complejos de magnitud $b$:

$$p_{1,2} = b \cos a \pm jb \sin a$$

$$p_{1,2} = b\angle a$$

Crece o decrece según $|b|$

# Sinusoidales por series geométricas

$$f(k) = b^k \sin(ak) \quad F(z) = \frac{zb\sin a}{z^2 - 2bz\cos a + b^2}$$

Polos complejos de magnitud $b$:

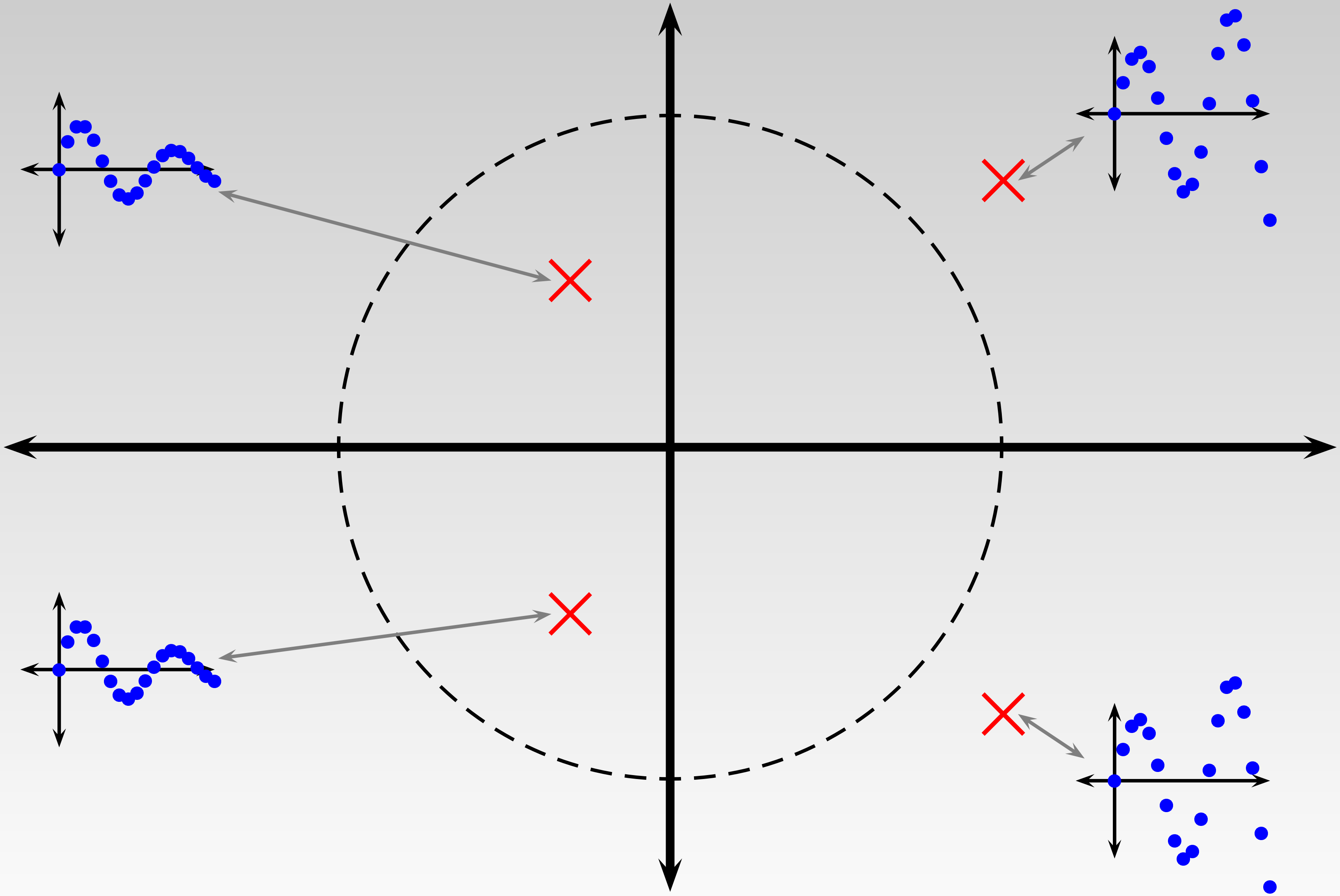
$$p_{1,2} = b\cos a \pm jb\sin a$$

$$p_{1,2} = b\underline{|a}$$

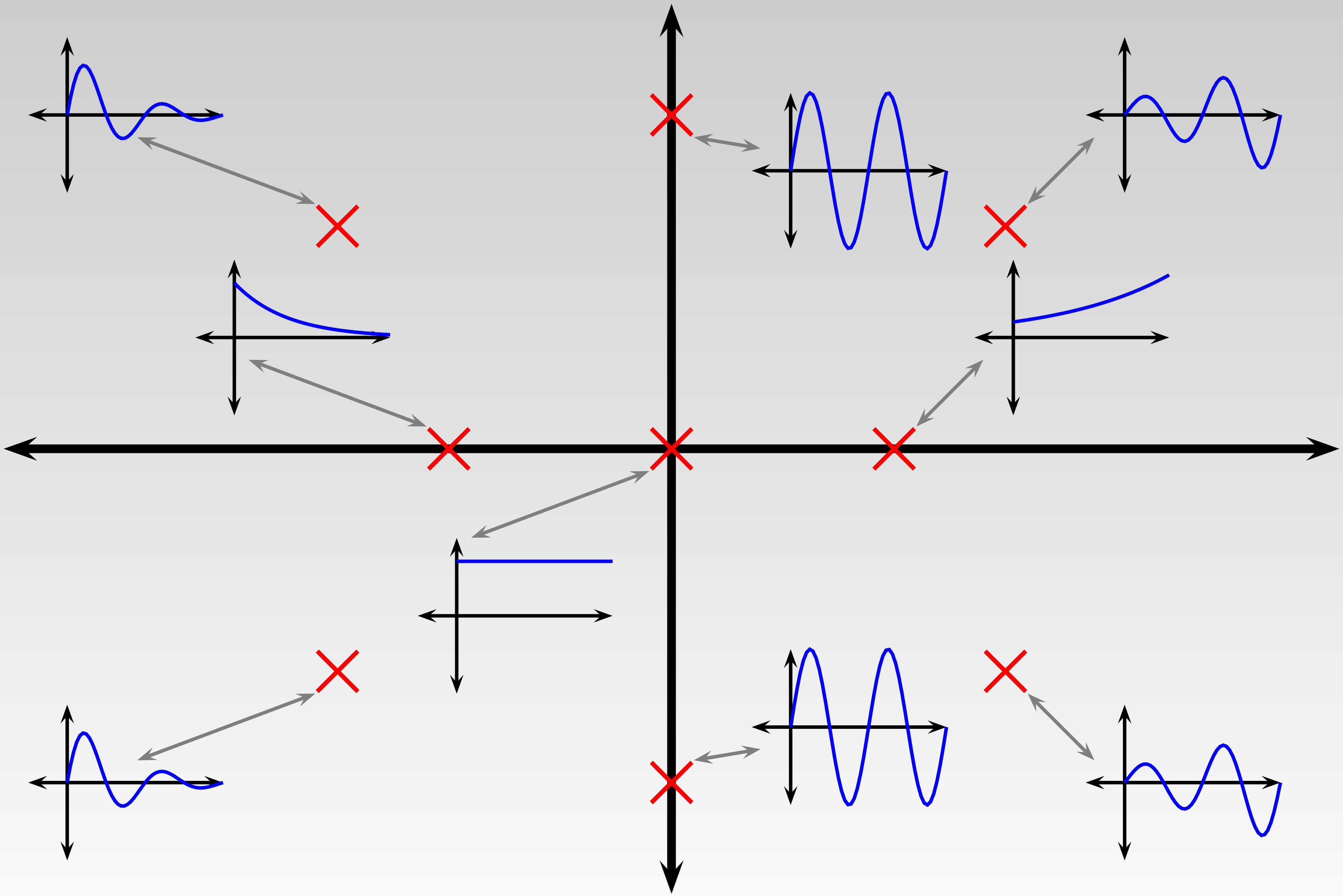
Crece o decrece según $|b|$

Un resultado similar para $b^k\cos(ak)$

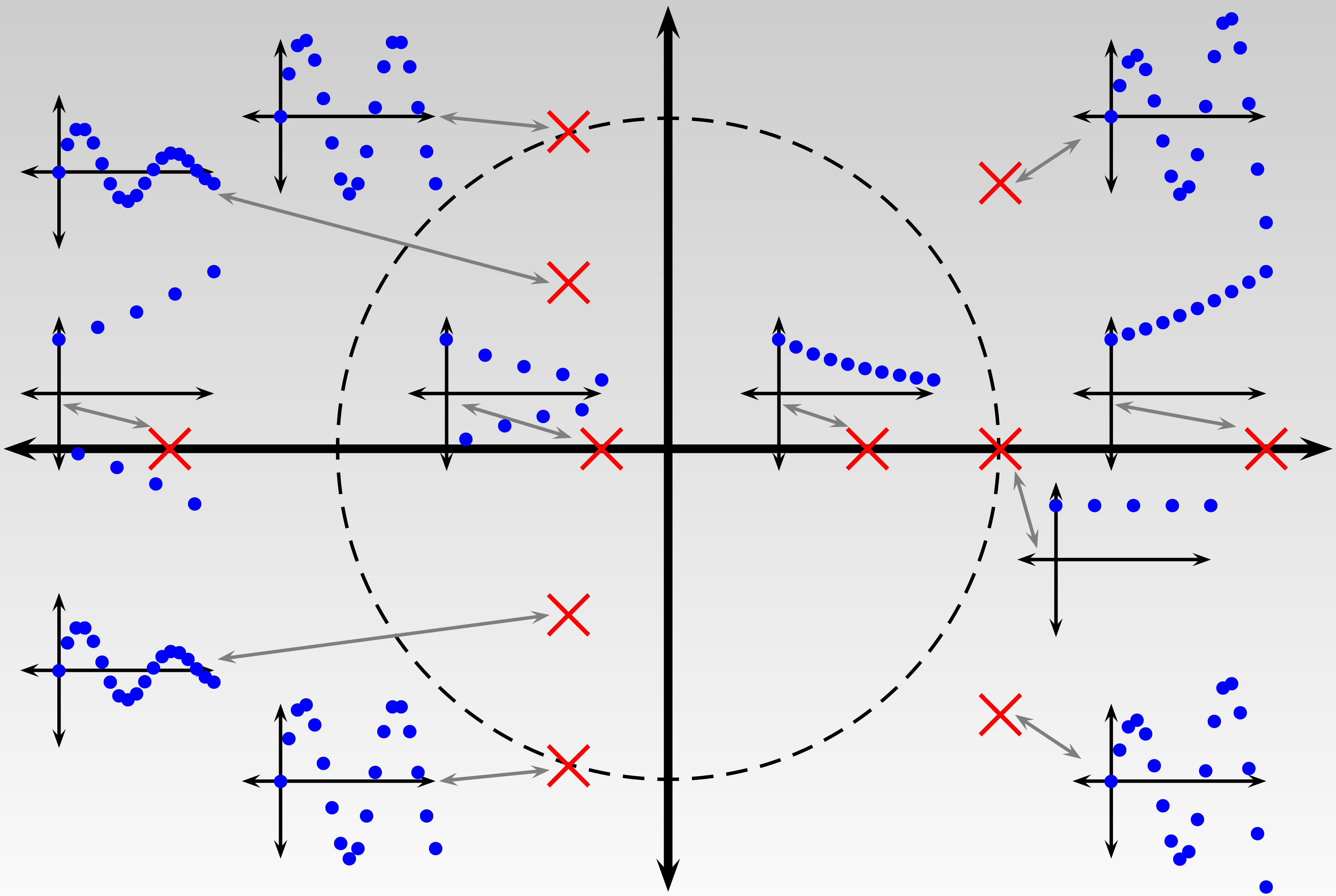
# Sinusoides por series geométricas



# **Plano** $s$



# Plano $z$



# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I de Laplace de $F(s) = \frac{4}{s-3}$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I de Laplace de $F(s) = \frac{4}{s-3}$

$$F(s) = \frac{4}{s-3} = 4\frac{1}{s-3}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I de Laplace de $F(s) = \frac{4}{s-3}$

$$F(s) = \frac{4}{s-3} = 4\frac{1}{s-3}$$

$\frac{1}{s-3} \quad \sim \quad \frac{1}{s-a} \quad \rightarrow \quad e^{at}.$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I de Laplace de $F(s) = \frac{4}{s-3}$

$$F(s) = \frac{4}{s-3} = 4\frac{1}{s-3}$$

$\frac{1}{s-3} \quad \sim \quad \frac{1}{s-a} \quad \rightarrow \quad e^{at}$. Por Linealidad:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{4\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{3t}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

$$(s-\sigma)^2 + \omega^2 = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

$$(s-\sigma)^2 + \omega^2 = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2$$

Igualando coeficientes:

$$-2\sigma = 1 \text{ y } \sigma^2 + \omega^2 = 1$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

$$(s-\sigma)^2 + \omega^2 = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2$$

Igualando coeficientes:

$$-2\sigma = 1 \text{ y } \sigma^2 + \omega^2 = 1$$

$$\sigma = -1/2 \quad \omega^2 = 3/4$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

T.I. de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$A\cos\phi + B\sin\phi = C\cos(\phi + \theta)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ y } \theta = -\tan^{-1}\frac{B}{A}$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\sqrt{1+3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\right]$$

# Utilización de la tabla de parejas de transformadas

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right]$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \sqrt{1+3} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2}t - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} \right) \right]$$

$$f(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2}t - 60^\circ \right)$$

# Fracciones Parciales

$$F(s) = \frac{\alpha_m s^m + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_n s^n + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}$$

# Fracciones Parciales

$$F(s) = \frac{\alpha_m s^m + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_n s^n + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}$$

Reescribir $F(s)$ ($F(z)$)como suma de funciones más sencillas. *Expansión en Fracciones Parciales*

# Fracciones Parciales

1. Si $m \geq n$ entonces dividir.

$$F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s+1} = 2s - 1 + \frac{3}{s+1}$$

# Fracciones Parciales

1. Si $m \geq n$ entonces dividir.

$$F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s+1} = 2s - 1 + \frac{3}{s+1}$$


$$F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s+1} = 2s - 1 + \frac{3}{s+1}$$

# Fracciones Parciales

2. Identificar las raíces del polinomio del denominador $p_i$, y sus multiplicidades $r_i$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\cdots(s-p_k)^{r_k}}$$

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n \quad n \text{ es el grado de } D(s)$$

# Fracciones Parciales

3. Escribir la fracción como suma de de fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{A_{11}}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(s-p_1)^{r_1}} +$$

$$\frac{A_{21}}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(s-p_k)^{r_k}}$$

4. Obtener los coeficientes $A_{ij}$

# Algunas Dificultades

- Obtener de las raíces de $D(s)$ (software)
- Obtener los coeficientes $A_{ij}$
- Raices y coeficientes complejos.

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{i1} = \left\{ (s - p_i) F(s) \right\} \Big|_{s=p_i}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{i1} = \{(s - p_i)F(s)\}\big|_{s=p_i}$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{i1} = \{(s - p_i)F(s)\}\big|_{s=p_i}$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$A_{11} = \left\{(s+2)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-2}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{i1} = \{(s - p_i)F(s)\}|_{s=p_i}$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$A_{11} = \left\{(s+2)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A_{11} = \left\{\frac{-3s+1}{(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-2} = \frac{-3(-2)+1}{(-2)+4} = \frac{7}{2}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{21} = \left\{ (s+4)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} \right\}\Bigg|_{s=-4}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{21} = \left\{ (s+4)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} \right\}\Bigg|_{s=-4}$$

$$A_{21} = \left\{ \frac{-3s+1}{(s+2)} \right\}\Bigg|_{s=-4} = \frac{-3(-4)+1}{(-4)+2} = -\frac{13}{2}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad 1

$$A_{21} = \left\{ (s+4)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} \right\}\Bigg|_{s=-4}$$

$$A_{21} = \left\{ \frac{-3s+1}{(s+2)} \right\}\Bigg|_{s=-4} = \frac{-3(-4)+1}{(-4)+2} = -\frac{13}{2}$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{7/2}{s+2} + \frac{-13/2}{s+4}$$

# $A_{ij}$ **Multiplicidad** $> 1$

$$A_{ij} = \frac{1}{(r_i - j)!} \frac{d^{r_i - j}}{ds^{r_i - j}} \left\{ (s - p_i)^{r_i} F(s) \right\} \Big|_{s=p_i}$$

# $A_{ij}$ **Multiplicidad** $> 1$

$$A_{ij} = \frac{1}{(r_i - j)!} \frac{d^{r_i - j}}{ds^{r_i - j}} \left\{ (s - p_i)^{r_i} F(s) \right\} \bigg|_{s = p_i}$$

$$F(s) = \frac{4s^2 - 1}{(s+2)^3} = \frac{A_{11}}{(s+2)} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{13}}{(s+2)^3}$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad $> 1$

$$A_{ij} = \frac{1}{(r_i - j)!} \frac{d^{r_i - j}}{ds^{r_i - j}} \{(s - p_i)^{r_i} F(s)\}\Big|_{s=p_i}$$

$$F(s) = \frac{4s^2 - 1}{(s+2)^3} = \frac{A_{11}}{(s+2)} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{13}}{(s+2)^3}$$

$$A_{13} = \frac{1}{(0)!} \frac{d^0}{ds^0} \left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2 - 1}{(s+2)^3} \right\}\Big|_{s=-2}$$

$$A_{13} = 4s^2 - 1\Big|_{s=-2} = 4(-2)^2 - 1 = 15$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad $> 1$

$$A_{12} = \frac{1}{(1)!}\,\frac{d^1}{ds^1}\left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} \right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A_{12} = 8s\big|_{s=-2} = 8(-2) = -16$$

# $A_{ij}$ Multiplicidad $> 1$

$$A_{12} = \frac{1}{(1)!}\,\frac{d^1}{ds^1}\left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} \right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A_{12} = 8s\big|_{s=-2} = 8(-2) = -16$$

$$A_{11} = \frac{1}{(2)!}\,\frac{d^2}{ds^2}\left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} \right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A_{11} = \frac{1}{2} 8\Bigg|_{s=-2} = 4$$

# $A_{ij}$ **Multiplicidad** $> 1$

$$F(s) = \frac{4s^2 - 1}{(s+2)^3} = \frac{4}{(s+2)} + \frac{-16}{(s+2)^2} + \frac{16}{(s+2)^3}$$

# Raíces complejas

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 4s + 13)}$$

$$F(s) = \frac{A_{11}}{s - 0} + \frac{A_{21}}{s - (-2 + j3)} + \frac{A_{31}}{s - (-2 - j3)}$$

# Raíces complejas

$$A_{11} = \left\{ (s) \frac{10}{s(s^2+4s+13)} \right\} \Bigg|_{s=0}$$

$$A_{11} = \left\{ \frac{10}{(s^2+4s+13)} \right\} \Bigg|_{s=0}$$

$$A_{11} = \frac{10}{(0)^2+4(0)+13} = \frac{10}{13}$$

# Raíces complejas

$$A_{21} = \left\{ (s - (-2 + j3)) \frac{10}{s(s^2 + 14s + 13)} \right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A_{21} = \left\{ \frac{10}{s(s - (-2 - j3))} \right\}\Bigg|_{s=-2+j3}$$

$$A_{21} = \frac{10}{(-2 + j3)(-2 + j3 - (-2 - j3))}$$

$$A_{21} = \frac{10}{(-2 + j3)(j6)} = -0{,}38 + j0{,}26$$

# Raíces complejas

$$A_{31} = \left\{ (s - (-2 - j3)) \frac{10}{s(s^2 + 14s + 13)} \right\} \Bigg|_{s=-2}$$

$$A_{31} = \left\{ \frac{10}{s(s - (-2 + j3))} \right\} \Bigg|_{s=-2-j3}$$

$$A_{31} == \frac{10}{(-2 - j3)(-2 - j3 - (-2 - j3))}$$

$$A_{31} = \frac{10}{(-2 - j3)(-j6)} = -0{,}38 - j0{,}26$$

# Raíces complejas

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)}$$

$$= \frac{10/13}{s} + \frac{-0{,}38 + j0{,}26}{s-(-2+j3)} + \frac{-0{,}38 - j0{,}26}{s-(-2-j3)}$$

conjugados

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} - \frac{0{,}77s + 3{,}08}{s^2+4s+13}$$

# Otras estrategias

- Sumar fracciones parciales e igualar coeficientes.
- Las Fracciones de Polos complejos conjugados son de la forma:

$$\frac{As + B}{s^2 + Cs + D}$$

# Ejemplo

$$F(s) = \frac{-3s \quad + \ 1}{(s+2)(s+4)}$$

# Ejemplo

$$F(s) = \frac{-3s \quad + \;\; 1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

# Ejemplo

$$F(s) = \frac{-3s \quad + \; 1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$= \frac{A_{11}s + 4A_{11} + A_{21}s + 2A_{21}}{(s+2)(s+4)}$$

# Ejemplo

$$F(s) = \frac{-3s \quad + \quad 1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$= \frac{A_{11}s + 4A_{11} + A_{21}s + 2A_{21}}{(s+2)(s+4)}$$

$$= \frac{(A_{11} + A_{21})s \qquad + \qquad (4A_{11} + 2A_{21})}{(s+2)(s+4)}$$

# Ejemplo

$$F(s) = \frac{-3s + 1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$= \frac{A_{11}s + 4A_{11} + A_{21}s + 2A_{21}}{(s+2)(s+4)}$$

$$= \frac{(A_{11} + A_{21})s + (4A_{11} + 2A_{21})}{(s+2)(s+4)}$$

# Otro Ejemplo

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = & -3 \\ 4A_{11} + 2A_{21} = & 1 \end{cases}$$

# Otro Ejemplo

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = & -3 \\ 4A_{11} + 2A_{21} = & 1 \end{cases}$$

$$A_{11} = 7/2 \quad A_{21} = -13/2$$

# Otro Ejemplo

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = & -3 \\ 4A_{11} + 2A_{21} = & 1 \end{cases}$$

$$A_{11} = 7/2 \quad A_{21} = -13/2$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{7/2}{s+2} + \frac{-13/2}{s+4}$$

# Otro Ejemplo

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A_{11}}{s} + \frac{As+B}{s^2+4s+13}$$

# Otro Ejemplo

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A_{11}}{s} + \frac{As+B}{s^2+4s+13}$$

$$A_{11} = \left\{ (s)\frac{10}{s(s^2+4s+13)} \right\}\Bigg|_{s=0} = \frac{10}{13}$$

# Otro Ejemplo

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A_{11}}{s} + \frac{As+B}{s^2+4s+13}$$

$$A_{11} = \left\{ (s)\frac{10}{s(s^2+4s+13)} \right\}\Bigg|_{s=0} = \frac{10}{13}$$

$$F(s) = \frac{\frac{10}{13}s^2 + 4\frac{10}{13}s + 3\frac{10}{13} + As^2 + Bs}{s(s^2+4s+13)}$$

# Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{10}{13} + A = & 0 \\ 4\frac{10}{13} + B = & 0 \end{cases}$$

# Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{10}{13} + A = & 0 \\ 4\frac{10}{13} + B = & 0 \end{cases}$$

$$A = -10/13 \quad B = -40/13$$

# Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{10}{13} + A = & 0 \\ 4\frac{10}{13} + B = & 0 \end{cases}$$

$$A = -10/13 \quad B = -40/13$$

$$F(s) = \frac{10/13}{s} - \frac{0{,}77s + 3{,}08}{s^2 + 4s + 13}$$

# Solución de E.D. con Transformadas

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.

# Solución de E.D. con Transformadas

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.

2. Despejar la transformada de la función desconocida.

# Solución de E.D. con Transformadas

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.
2. Despejar la transformada de la función desconocida.
3. Aplicar la transformada inversa (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a la función desconocida.

# Ejemplo

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 5\mu(k)$$

$$y(0) = -1 \quad y(1) = 2$$

# Ejemplo

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 5\mu(k)$$

$$y(0) = -1 \quad y(1) = 2$$

$$\mathcal{Z}\left\{y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{5\mu(k)\right\}$$

# Ejemplo

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=5\mu(k)$$

$$y(0)=-1 \quad y(1)=2$$

$$\mathcal{Z}\left\{y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)\right\}=\mathcal{Z}\left\{5\mu(k)\right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{y(k+2)\right\}+3\mathcal{Z}\left\{y(k+1)\right\}+2\mathcal{Z}\left\{y(k)\right\}$$

$$=5\mathcal{Z}\left\{\mu(k)\right\}$$

# Ejemplo

$$\left[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)\right] +$$

$$3\left[zY(z) - zy(0)\right] + 2Y(z) = 5\frac{z}{z-1}$$

# Ejemplo

$$\left[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)\right] +$$

$$3\left[zY(z) - zy(0)\right] + 2Y(z) = 5\frac{z}{z-1}$$

Remplazando las C.I.

$$\left[z^2Y(z) + z^2 - 2z)\right] +$$

$$3\left[zY(z) + z\right] + 2Y(z) = 5\frac{z}{z-1}$$

# Ejemplo

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]+z^2-2z+3z=5\frac{z}{z-1}$$

# Ejemplo

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]+z^2-2z+3z=5\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]=5\frac{z}{z-1}-z^2-z$$

# Ejemplo

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]+z^2-2z+3z=5\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]=5\frac{z}{z-1}-z^2-z$$

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]=\frac{-z^3+6z}{z-1}$$

# Ejemplo

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]+z^2-2z+3z=5\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]=5\frac{z}{z-1}-z^2-z$$

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]=\frac{-z^3+6z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{-z^3+6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

# Ejemplo

$$Y(z) = \frac{-z^3 + 6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

# Ejemplo

$$Y(z) = \frac{-z^3 + 6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

# Ejemplo

$$Y(z) = \frac{-z^3 + 6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

¿Cuál sería la transformada inversa de cada fracción?

# Ejemplo

$$Y(z) = \frac{-z^3 + 6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

¿Cuál sería la transformada inversa de cada fracción?

Un pequeño truco...

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

$$A_{11} = \left\{ \frac{-z^2+6}{(z+1)(z+2)} \right\}\Bigg|_{z=1} = \frac{5}{6}$$

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

$$A_{11} = \left\{ \frac{-z^2+6}{(z+1)(z+2)} \right\}\bigg|_{z=1} = \frac{5}{6}$$

$$A_{21} = \frac{-5}{2}$$

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{A_{11}}{z-1} + \frac{A_{21}}{z+1} + \frac{A_{31}}{z+2}$$

$$A_{11} = \left\{ \frac{-z^2+6}{(z+1)(z+2)} \right\} \Bigg|_{z=1} = \frac{5}{6}$$

$$A_{21} = \frac{-5}{2} \quad A_{31} = \frac{2}{3}$$

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{z-1} + \frac{\frac{-5}{2}}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z+2}$$

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{z-1} + \frac{\frac{-5}{2}}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{5}{6}z}{z-1} + \frac{\frac{-5}{2}z}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}z}{z+2}$$

# Ejemplo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{z-1} + \frac{\frac{-5}{2}}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{5}{6}z}{z-1} + \frac{\frac{-5}{2}z}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}z}{z+2}$$

$$y(k) = \frac{5}{6}\mu(k) + \frac{-5}{2}(-1)^k + \frac{2}{3}(-2)^k$$